ROBINSON
MATH BOWL, 2014

28 de marzo de 2014

Mesa #		Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 — **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que el perímetro de un triángulo isósceles y rectángulo es 36. Encuentre su área. Explique.

Problem. Suppose that the perimeter of an isosceles right triangle is 36. Find its area. Explain.

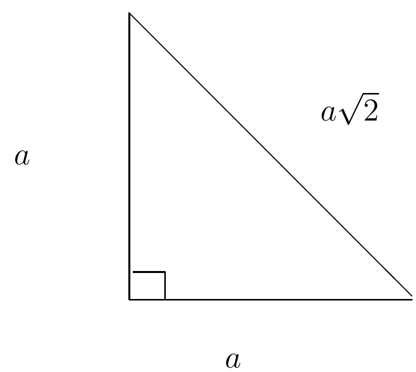
Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que el perímetro de un triángulo isósceles y rectángulo es 36. Encuentre su área. Explique.

Problem. Suppose that the perimeter of an isosceles right triangle is 36. Find its area. Explain.

Solución.



El perímetro es,

$$\begin{aligned} a + a + a\sqrt{2} &= 2a + a\sqrt{2} \\ &= a(2+\sqrt{2}) \\ &= 36 \\ a &= \frac{36}{2+\sqrt{2}} \\ a &= 18(2-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

El área es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a)(a) &= \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{324(2-\sqrt{2})^2}{2} \\ &= 162(6-4\sqrt{2}) \\ &= 972 - 648\sqrt{2} \end{aligned}$$

Mesa #	

Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Resuelva para x

$$3^{-x} \cdot 9^{5x} \cdot 27^{-x} = \frac{1}{81}$$

Explique.

Problem. Solve for x

$$3^{-x} \cdot 9^{5x} \cdot 27^{-x} = \frac{1}{81}$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**
Robinson Math Bowl, 2014	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Resuelva para x

$$3^{-x} \cdot 9^{5x} \cdot 27^{-x} = \frac{1}{81}$$

Explique.

Problem. Solve for x

$$3^{-x} \cdot 9^{5x} \cdot 27^{-x} = \frac{1}{81}$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned} 3^{-x} \cdot 9^{5x} \cdot 27^{-x} &= 3^{-x} \cdot \left(3^2\right)^{5x} \cdot \left(3^3\right)^{-x} \\ &= 3^{-x} \cdot 3^{10x} \cdot 3^{-3x} \\ &= 3^{-x+10x-3x} \\ &= 3^{6x} \end{aligned}$$

La ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} 3^{6x} &= 3^{-4} \\ 6x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que,

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 8x + y \leq 17 \quad \text{y} \quad 2x + 7y \leq 13.$$

Encuentre el valor máximo posible para la expresión $x + y$. Explique.

Problem. Given that,

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 8x + y \leq 17 \quad \text{y} \quad 2x + 7y \leq 13.$$

Find the maximum possible value of the expression $x + y$. Explain.

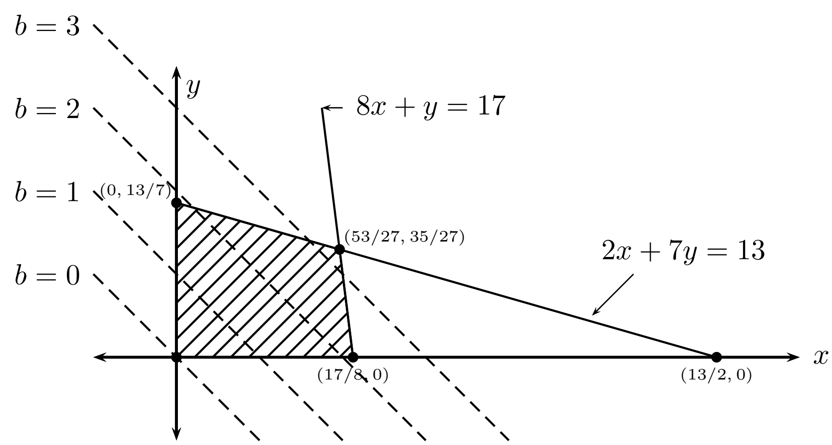
Problema. Dado que,

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 8x + y \leq 17 \quad \text{y} \quad 2x + 7y \leq 13.$$

Encuentre el valor máximo posible para la expresión $x + y$. Explique.

Solución.
Las cuatro rectas; $x = 0$, $y = 0$, $8x + y = 17$ y $2x + 7y = 13$ se intersecan en los puntos

$$(0,0), (17/8,0), (13/2,0), (53/27,35/27), (0,13/7), (0,17).$$



En la figura de la derecha se ilustra la región (de forma sombreada) en el plano que satisface el sistema de desigualdades dado.

Sea $b = x+y$. Note que si le asignamos valores arbitrarios a b, cada uno de estos valores determina una recta en el plano, a saber, la recta $y = -x + b$. En la figura se ilustra (de manera entrecortada) la recta obtenida para los valores $b = 0, 1, 2, 3$ respectivamente. El valor máximo posible de b que nos da una recta que interseca el conjunto sombreado se alcanza en uno de los vértices del cuadrilátero sombreado. Sustituyendo cada uno de los vértices del cuadrilátero, obtenemos

$$(0,0) \implies b = 0 + 0 = 0$$

$$(17/8,0) \implies b = 17/8 + 0 = 17/8 = 2.125$$

$$(53/27,35/27) \implies b = 53/27 + 35/27 = 88/27 = 3.259\ldots$$

$$(0,13/7) \implies b = 0 + 13/7 = 13/7 = 1.857\ldots$$

Por lo tanto, el valor máximo de $x + y$ ocurre en el punto $(53/27, 35/27)$ y es igual a $\boxed{\frac{88}{27}.}$

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Los puntos A, B y C están sobre un círculo de radio 5 tal que $AB = 6$ y $AC = 8$. Encuentre el menor de los dos posibles valores de BC. Explique.

Problem. Points A, B and C lie on a circle of radius 5 such that $AB = 6$ and $AC = 8$. Find the smaller of the two possible values of BC. Explain.

Problema. Los puntos A, B y C están sobre un círculo de radio 5 tal que $AB = 6$ y $AC = 8$. Encuentre el menor de los dos posibles valores de BC. Explique.

Solución.

Suponga, sin perder generalidad, que el centro del círculo es el origen. En coordenadas polares,

$$A = (5\cos(\alpha), 5\sin(\alpha)), \quad B = (5\cos(\beta), 5\sin(\beta)) \quad \text{y} \quad C = (5\cos(\gamma), 5\sin(\gamma)).$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(A,B)^2 = 36 &\implies (5\cos(\alpha) - 5\cos(\beta))^2 + (5\sin(\alpha) - 5\sin(\beta))^2 = 36 \\
&\implies 50 - 50\left[\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\right] = 36 \\
&\implies 50 - 50\left[\cos(\alpha - \beta)\right] = 36 \\
&\implies \cos(\alpha - \beta) = \frac{36 - 50}{-50} = \frac{-14}{-50} = \frac{7}{25}
\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\operatorname{dist}(A,C)^2 = 64 \implies \cos(\alpha - \gamma) = \frac{64 - 50}{-50} = \frac{14}{-50} = -\frac{7}{25}$$

Utilizando la identidad trigonométrica básica obtenemos,

$$\sin(\alpha - \beta) = \pm\sqrt{1 - (7/25)^2} = \pm 24/25 \qquad \sin(\alpha - \gamma) = \pm\sqrt{1 - (-7/25)^2} = \pm 24/25.$$

Queremos el menor valor posible de $BC = \operatorname{dist}(B,C)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(B,C)^2 &= (5\cos(\beta) - 5\cos(\gamma))^2 + (5\sin(\beta) - 5\sin(\gamma))^2 \\
&= 50 - 50\left[\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\right] \\
&= 50 - 50\left[\cos(\beta - \gamma)\right] \\
&= 50 - 50\left[\cos(\beta - \alpha + \alpha - \gamma)\right] \\
&= 50 - 50\left[\cos(\beta - \alpha)\cos(\alpha - \gamma) - \sin(\beta - \alpha)\sin(\alpha - \gamma)\right] \\
&= 50 - 50\left[\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \gamma) + \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha - \gamma)\right] \\
&= 50 - 50\left[\left(\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{7}{25}\right) \pm \left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\right] \\
&= 50\left[1 + \frac{7^2}{25^2} \pm \frac{24^2}{25^2}\right] \underbrace{=}_{\text{para minimizar}} 50\left[1 + \frac{7^2}{25^2} - \frac{24^2}{25^2}\right] = \frac{196}{25}
\end{aligned}$$

Así que, el menor de los dos posibles valores de BC es $\boxed{BC = \sqrt{\frac{196}{25}} = \frac{14}{5}.}$

Problema. Suponga que $P(x/3) = x^2+x+1$. ¿Cuál es la suma de las raíces de $P(3x) = 7$? Explique.

Problem. Suppose that $P(x/3) = x^2 + x + 1$. What is the sum of all the roots of $P(3x) = 7$? Explain.

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**
Robinson Math Bowl, 2014	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que $P(x/3) = x^2+x+1$. ¿Cuál es la suma de las raíces de $P(3x) = 7$? Explique.

Problem. Suppose that $P(x/3) = x^2 + x + 1$. What is the sum of all the roots of $P(3x) = 7$? Explain.

Solución.

Si $P(x/3) = x^2 + x + 1$, entonces $P(3x) = (9x)^2 + (9x) + 1 = 81x^2 + 9x + 1$. Sean p, q las raíces de $P(3x) = 7$, entonces

$$\begin{aligned} P(3x) = 7 &\implies 81x^2 + 9x + 1 = 7 \\ &\implies 81x^2 + 9x - 6 = 0 \\ &\implies 81\left(x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right) = 0 \end{aligned}$$

De otro lado, como p, q son las raíces de $P(3x) = 7$,

$$\begin{aligned} 81\left(x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right) = 0 &\implies 81\,(x-p)\,(x-q) = 0 \\ &\implies 81\left(x^2 - (p+q)x + pq\right) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos $\boxed{p + q = -\frac{1}{9}.}$

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre la solución real mayor de la ecuación

$$-6 = (x-3)(x+1)(x-4)(x+2).$$

Explique.

Problem. Find the largest real solution to the equation

$$-6 = (x-3)(x+1)(x-4)(x+2).$$

Explain.

Problema. Encuentre la solución real mayor de la ecuación

$$-6 = (x-3)(x+1)(x-4)(x+2).$$

Explique.

Solución.
Note que,

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-3) \\ &= (6-4)(6-9) \\ &= \left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-3\right)\left(\sqrt{6}+3\right) \\ &= \left(\left(1+\sqrt{6}\right)-3\right)\left(\left(1+\sqrt{6}\right)+1\right)\left(\left(1+\sqrt{6}\right)-4\right)\left(\left(1+\sqrt{6}\right)+2\right). \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} -6 &= (2)(-3) \\ &= (6-4)(6-9) \\ &= \left(-\sqrt{6}-2\right)\left(-\sqrt{6}+2\right)\left(-\sqrt{6}-3\right)\left(-\sqrt{6}+3\right) \\ &= \left(\left(1-\sqrt{6}\right)-3\right)\left(\left(1-\sqrt{6}\right)+1\right)\left(\left(1-\sqrt{6}\right)-4\right)\left(\left(1-\sqrt{6}\right)+2\right). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} -6 &= (3)(-2) \\ &= (7-4)(7-9) \\ &= \left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right) \\ &= \left(\left(1+\sqrt{7}\right)-3\right)\left(\left(1+\sqrt{7}\right)+1\right)\left(\left(1+\sqrt{7}\right)-4\right)\left(\left(1+\sqrt{7}\right)+2\right). \end{aligned}$$

De forma similar podemos ver que $1-\sqrt{7}$ es otra solución. Las soluciones reales son

$$1 \pm \sqrt{6}, \quad 1 \pm \sqrt{7}.$$

La solución real mayor de la ecuación es $\boxed{1+\sqrt{7}.}$

Otra forma, la ecuación es equivalente a

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 30 = (x^2-2x-5)(x^2-2x-6) = 0.$$

Mesa # **Valor : 8 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. ¿Cuántas soluciones reales tiene el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y = 11, \qquad x + y^2 = 7?$$

Explique.

Problem. How many real solutions does the system of equations

$$x^2 + y = 11, \qquad x + y^2 = 7$$

have? Explain.

Problema. ¿Cuántas soluciones reales tiene el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y = 11, \qquad x + y^2 = 7?$$

Explique.

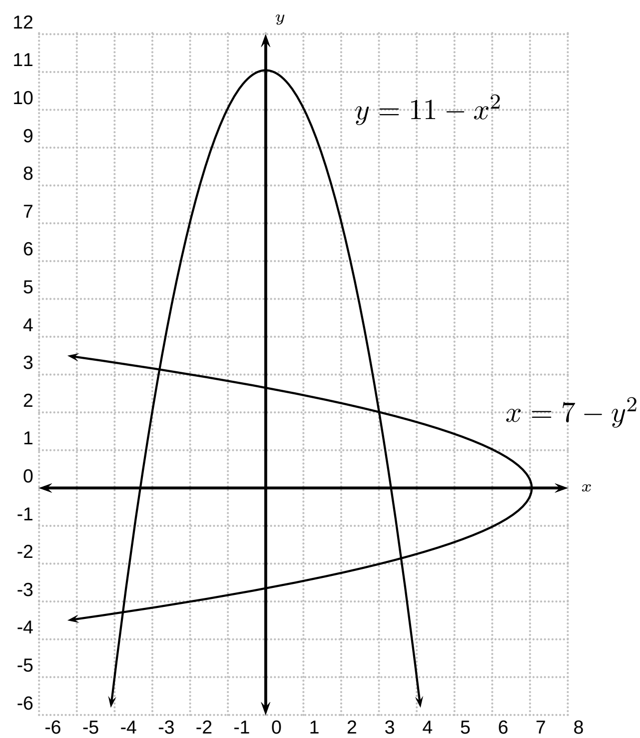
Problem. How many real solutions does the system of equations

$$x^2 + y = 11, \qquad x + y^2 = 7$$

have? Explain.

Solución.

Recuerdan la gráfica de una parábola?



El sistema tiene $\boxed{\text{cuatro soluciones reales.}}$ El punto $(3, 2)$ es una de ellas.

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014

Tiempo : 5 mins.

Problema. Sean x, y, z números reales tales que $3x, 4y, 5z, \ldots$ es una progresión geométrica y tales que $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ es una progresión aritmética. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$? Explique.

Problem. Let x, y, z be real numbers such that $3x, 4y, 5z, \ldots$ is a geometric progression and such that $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ is an arithmetic progression What is the value of $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, z números reales tales que $3x, 4y, 5z, \ldots$ es una progresión geométrica y tales que $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ es una progresión aritmética. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$? Explique.

Solución.

Como $3x, 4y, 5z, \ldots$ es una progresión geométrica

$$4y = \sqrt{3x \cdot 5z} = \sqrt{15xz}.$$

Como $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ es una progresión aritmética

$$\frac{1}{y} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}{2}.$$

Cuadrando y simplificando un poco las dos ecuaciones arriba,

$$16y^2 = 15xz \tag{1}$$

$$\frac{4}{y^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz} \tag{2}$$

Despejando para y^2 en la ecuación (1) y sustituyendo en la ecuación (2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{4 \cdot 16}{15xz} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz} \\
\frac{64 - 30}{15xz} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \\
\frac{34}{15xz} &= \frac{z^2 + x^2}{x^2 z^2} \\
\frac{34}{15} &= \frac{z^2 + x^2}{xz}
\end{aligned}$$

En este caso, tenemos que

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2 + z^2}{xz} = \frac{34}{15}.$$

Mesa #	Valor : 8 ptos.
Robinson Math Bowl, 2014	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Encuentre la suma de las soluciones de

$$|x - |3x - 2|| = \frac{1}{2}.$$

Explique.

Problem. Find the sum of the solutions of

$$|x - |3x - 2|| = \frac{1}{2}.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2014 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Encuentre la suma de las soluciones de

$$|x - |3x-2|| = \frac{1}{2}.$$

Explique.

Problem. Find the sum of the solutions of

$$|x - |3x-2|| = \frac{1}{2}.$$

Explain.

Solución.
Primero, tenemos

$$x - |3x-2| = \pm\frac{1}{2}.$$

Esto es equivalente a,

$$|3x-2| = x \mp \frac{1}{2}.$$

Así que hay que resolver cuatro ecuaciones, a saber

$$3x - 2 = \pm\left(x \mp \frac{1}{2}\right).$$

Las ecuaciones son

$$3x-2 = x - \frac{1}{2} \implies x = \frac{3}{4}$$

$$3x-2 = x + \frac{1}{2} \implies x = \frac{5}{4}$$

$$3x-2 = -x - \frac{1}{2} \implies x = \frac{3}{8}$$

$$3x-2 = -x + \frac{1}{2} \implies x = \frac{5}{8}$$

La suma de las soluciones es

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6+10+3+5}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Robinson Math Bowl, 2014	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $A + B = 2$ y que $A^2 + B^2 = 5$. Encuentre

$$A^3 + B^3.$$

Explique.

Problem. Suppose that $A + B = 2$ and that $A^2 + B^2 = 5$. Find

$$A^3 + B^3.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Robinson Math Bowl, 2014	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $A+B=2$ y que $A^2+B^2=5$. Encuentre

$$A^3+B^3.$$

Explique.

Problem. Suppose that $A+B=2$ and that $A^2+B^2=5$. Find

$$A^3+B^3.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
4 = 2^2 = (A+B)^2 &= A^2+B^2+2AB \\
4 &= 5+2AB \\
-2AB &= 1 \\
AB &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 = 2^3 = (A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \\
8 &= A^3+B^3+3AB\,(A+B) \\
8 &= A^3+B^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)(2) \\
8 &= A^3+B^3-3
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^3+B^3=11.$$