ROBINSON
MATH BOWL, 2013

8 de marzo de 2013

Mesa # **Valor : 8 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Considere los siguientes números reales positivos,

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{5 \cdot 6}} \qquad B = \sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{5}} \qquad C = \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{6}} \qquad D = \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{6}} \qquad E = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{5}},$$

Ordene los números A, B, C, D, E de menor a mayor. Explique.

Problem. Consider the following positive real numbers,

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{5 \cdot 6}} \qquad B = \sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{5}} \qquad C = \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{6}} \qquad D = \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{6}} \qquad E = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{5}},$$

Order the numbers A, B, C, D, E in increasing order. Explain.

Problema. Considere los siguientes números reales positivos,

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{5 \cdot 6}} \qquad B = \sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{5}} \qquad C = \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{6}} \qquad D = \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{6}} \qquad E = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{5}},$$

Ordene los números A, B, C, D, E de menor a mayor. Explique.

Problem. Consider the following positive real numbers,

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{5 \cdot 6}} \qquad B = \sqrt{6 \cdot \sqrt[3]{5}} \qquad C = \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{6}} \qquad D = \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{6}} \qquad E = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{5}},$$

Order the numbers A, B, C, D, E in increasing order. Explain.

Solución.

Note que,

$$A = 5^{\frac{1}{6}} \times 6^{\frac{1}{6}} \qquad B = 5^{\frac{1}{6}} \times 6^{\frac{1}{2}} \qquad C = 5^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{6}} \qquad D = 5^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{6}} \qquad E = 5^{\frac{1}{6}} \times 6^{\frac{1}{3}},$$

Así que,

$$\begin{aligned} A^6 = 5 \times 6 &= 30 \\ B^6 = 5 \times 6^3 &= 1080 \\ C^6 = 5^3 \times 6 &= 750 \\ D^6 = 5^2 \times 6 &= 150 \\ E^6 = 5 \times 6^2 &= 180 \end{aligned}$$

Como la función $F(x) = x^6$ (o $G(x) = \sqrt[6]{x}$) es creciente en $[0, +\infty)$, entonces

$$\boxed{A < D < E < C < B.}$$

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**
Robinson Math Bowl, 2013	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Resuelva la ecuación para x,

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) + \log_2(x) + \log_4(x^2) + \log_8(x^3) + \log_{16}(x^4) = 115.$$

Explique.

Problem. Solve the equation for x,

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) + \log_2(x) + \log_4(x^2) + \log_8(x^3) + \log_{16}(x^4) = 115.$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**
Robinson Math Bowl, 2013	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Resuelva la ecuación para x,

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) + \log_2(x) + \log_4(x^2) + \log_8(x^3) + \log_{16}(x^4) = 115.$$

Explique.

Problem. Solve the equation for x,

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) + \log_2(x) + \log_4(x^2) + \log_8(x^3) + \log_{16}(x^4) = 115.$$

Explain.

Solución.

Note que los cinco sumandos son idénticos.

$$\begin{aligned}
\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x}) = \frac{\log_2(\sqrt{x})}{\log_2(\sqrt{2})} = \frac{\frac{1}{2}\log_2(x)}{\frac{1}{2}\log_2(2)} &= \log_2(x) \\
\log_2(x) &= \log_2(x) \\
\log_4(x^2) = \frac{\log_2(x^2)}{\log_2(4)} = \frac{2\log_2(x)}{2\log_2(2)} &= \log_2(x) \\
\log_8(x^3) = \frac{\log_2(x^3)}{\log_2(8)} = \frac{3\log_2(x)}{3\log_2(2)} &= \log_2(x) \\
\log_{16}(x^4) = \frac{\log_2(x^4)}{\log_2(16)} = \frac{4\log_2(x)}{4\log_2(2)} &= \log_2(x)
\end{aligned}$$

Sea $u = \log_2(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
5u &= 115 \\
u &= 23.
\end{aligned}$$

Porlo tanto,

$$\begin{aligned}
23 &= \log_2(x) \\
x &= 2^{23}.
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Problema. Dado que x y y son enteros positivos tales que,

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 71 \\ x^2y + xy^2 &= 880 \end{aligned}$$

Encuentre el valor de $x^2 + y^2$. Explique.

Problem. Given that x and y are positive integers such that,

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 71 \\ x^2y + xy^2 &= 880 \end{aligned}$$

Find the value of $x^2 + y^2$. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que x y y son enteros positivos tales que,

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 71 \\ x^2y + xy^2 &= 880 \end{aligned}$$

Encuentre el valor de $x^2 + y^2$. Explique.

Problem. Given that x and y are positive integers such that,

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 71 \\ x^2y + xy^2 &= 880 \end{aligned}$$

Find the value of $x^2 + y^2$. Explain.

Solución.

Sean $A = x + y$ y $B = xy$. Entonces el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} A + B &= 71 \\ AB &= 880 \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} A + \frac{880}{A} &= 71 \\ A^2 - 71A + 880 &= 0 \\ (A - 16)(A - 55) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son $(A, B) = (16, 55)$ o $(A, B) = (55, 16)$. B no puede ser 16 pues esto implicaría que $xy = 16$ y $x + y = 55$ lo que es imposible para enteros positivos x, y.

Por lo tanto, $A = 16$ y $B = 55$ y por ende

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= A^2 - 2B \\ &= 256 - 110 \\ &= 146 \end{aligned}$$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013

Tiempo : 5 mins.

Problema. Encuentre el valor mínimo de

$$\frac{9x^2\sin^2(x)+4}{x\sin(x)},$$

para $0 < x < \pi$. Explique.

Problem. Find the minimum value of

$$\frac{9x^2\sin^2(x)+4}{x\sin(x)},$$

for $0 < x < \pi$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Robinson Math Bowl, 2013	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor mínimo de

$$\frac{9x^2\sin^2(x)+4}{x\sin(x)},$$

para $0 < x < \pi$. Explique.

Problem. Find the minimum value of

$$\frac{9x^2\sin^2(x)+4}{x\sin(x)},$$

for $0 < x < \pi$. Explain.

Solución.

Sea $B = x\sin(x)$. Entonces, podemos escribir la expresión de la forma

$$\frac{9B^2+4}{B} = 9B + \frac{4}{B}.$$

Como $x > 0$ y $\sin(x) > 0$ en el intervalo $(0, \pi)$, obtenemos que $B > 0$. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$$9B + \frac{4}{B} \geq 2\sqrt{9B \cdot \frac{4}{B}} = 12.$$

Hay igualdad cuando $9B = \frac{4}{B}$ y esto último ocurre

$$\iff \quad B^2 = \frac{4}{9}$$

$$\iff \quad B = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto el $\boxed{\text{valor mínimo es 12}}$ y se alcanza cuando $B = x\sin(x) = \frac{2}{3}$.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. El número complejo z es igual a $9+bi$, donde b es un entero positivo e $i^2 = -1$. Dado que las partes imaginarias de z^2 y z^3 son iguales, encuentre b. Explique.

Problem. The complex number z is equal to $9 + bi$, where b is a positive integer and $i^2 = -1$. Given that the imaginary parts of z^2 and z^3 are equal, find b. Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. El número complejo z es igual a $9+bi$, donde b es un entero positivo e $i^2 = -1$. Dado que las partes imaginarias de z^2 y z^3 son iguales, encuentre b. Explique.

Problem. The complex number z is equal to $9 + bi$, where b is a positive integer and $i^2 = -1$. Given that the imaginary parts of z^2 and z^3 are equal, find b. Explain.

Solución.

$$\begin{aligned} z^2 &= (9+bi)^2 \\ &= 81 + 18bi + b^2(-1) \\ &= (81 - b^2) + 18bi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (9+bi)^3 \\ &= 9^3 + 3 \cdot 9^2(bi) + 3 \cdot 9(bi)^2 + (bi)^3 \\ &= 729 + 243bi - 27b^2 - b^3 i \\ &= (729 - 27b^2) + (243b - b^3)i \end{aligned}$$

Ahora, si igualamos la partes imaginarias de z^2 y z^3, como $b > 0$ es un entero, obtenemos:

$$\begin{aligned} 18b &= 243b - b^3 \\ b^3 &= 225b \\ b^2 &= 225 \\ b &= 15 \end{aligned}$$

Mesa # **Valor : 8 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. ¿Cuál es el producto de las raíces reales de la ecuación

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}\ ?$$

Explique.

Problem. What is the product of the real roots of the equation

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}\ ?$$

Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. ¿Cuál es el producto de las raíces reales de la ecuación

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45} \ ?$$

Explique.

Problem. What is the product of the real roots of the equation

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45} \ ?$$

Explain.

Solución.

Sea $y = x^2 + 18x + 30$, entonces la ecuación es

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{y+15} \\ y^2 &= 4(y+15) \\ y^2 - 4y - 60 &= 0 \\ (y-10)(y+6) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son $y = 10, -6$. La segunda solución nos da una cuadrática con soluciones complejas, así que usaremos la primera solución. Sustituyendo para y, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 18x + 30 &= 10 \\ x^2 + 18x + 20 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el $\boxed{\text{producto de las raíces reales es 20.}}$ Ya que

$$x^2 + 18x + 20 = (x-p)(x-q) = x^2 - (p+q)x + pq.$$

Otra forma, las raíces son $p = -9 + \sqrt{61}$ y $q = -9 - \sqrt{61}$ y su producto es 20.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que

$$\sin(5) + \sin(10) + \sin(15) + \cdots + \sin(175) = \tan\left(\frac{m}{n}\right),$$

donde los ángulos están medidos en grados, y m, n son enteros positivos relativamente primos que satisfacen $\frac{m}{n} < 90$. Encuentre $m + n$. Explique.

Problem. Given that

$$\sin(5) + \sin(10) + \sin(15) + \cdots + \sin(175) = \tan\left(\frac{m}{n}\right),$$

where angles are measured in degrees, and m, n are relatively prime positive integers that satisfy $\frac{m}{n} < 90$. Find $m + n$. Explain.

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que

$$\sin(5) + \sin(10) + \sin(15) + \cdots + \sin(175) = \tan\left(\frac{m}{n}\right),$$

donde los ángulos están medidos en grados, y m, n son enteros positivos relativamente primos que satisfacen $\frac{m}{n} < 90$. Encuentre $m + n$. Explique.

Solución.

Necesitamos evaluar la suma

$$S = \sin(5) + \sin(10) + \sin(15) + \cdots + \sin(175).$$

Multiplicando por $\sin(5)$,

$$\sin(5)S = \sin(5)(\sin(5) + \sin(10) + \sin(15) + \cdots + \sin(175)).$$

El lado izquierdo de esta última ecuación, utilizando, repetidamente, la identidad

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right),$$

en el lado derecho, es igual (telescópicamente) a

$$\frac{1}{2}\left(\cos(0) + \cos(5) - \cos(175) - \cos(180)\right) = \frac{1}{2}\left(2 + 2\cos(5)\right) = 1 + \cos(5).$$

Así que tenemos,

$$\sin(5)S = 1 + \cos(5),$$

o

$$S = \frac{1+\cos(5)}{\sin(5)} = \frac{1-\cos(175)}{\sin(175)}$$

Utilizando ahora la identidad

$$\tan(x) = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)},$$

e identificando que $2x = 175$, concluimos que $S = \tan\left(\frac{175}{2}\right)$.

Por lo tanto, $\boxed{m + n = 175 + 2 = 177.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La función f está definida sobre los enteros y satisface:

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{si } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)) & \text{si } n < 1000 \end{cases}$$

Encuentre $f(84)$. Explique.

Problem. The function f is defined over the integers and satisfies:

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{if } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)) & \text{if } n < 1000 \end{cases}$$

Find $f(84)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La función f está definida sobre los enteros y satisface:

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{si } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)) & \text{si } n < 1000 \end{cases}$$

Encuentre $f(84)$. Explique.

Problem. The function f is defined over the integers and satisfies:

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{if } n \geq 1000 \\ f(f(n+5)) & \text{if } n < 1000 \end{cases}$$

Find $f(84)$. Explain.

Solución.

Defina $f^n(x) = f(f(\cdots f(f(x))\cdots))$, donde la función es aplicada n veces. Entonces podemos ver (mientras $x < 1000$) que

$$f(84) = f(f(89)) = f^2(89) = f^3(94) = f^4(99) = \cdots = f^{y-1}(999) = f^y(1004),$$

donde y satisface $1004 = 84 + 5(y-1)$, lo que implica que $y = 185$, y por ende

$$f(84) = f^{185}(1004).$$

Además, podemos ver (tomando en cuenta cuando $x \geq 1000$ y cuando $x < 1000$) que

$$\begin{aligned} f^{185}(1004) &= f^{184}(1001) = f^{183}(998) = f^{184}(1003) = f^{183}(1000) \\ &= f^{182}(997) = f^{183}(1002) = f^{182}(999) = f^{183}(1004) \end{aligned}$$

Continuando de igual forma, podemos establecer que,

$$f^{185}(1004) = f^{183}(1004) = f^{181}(1004) = \cdots = f^3(1004).$$

Finalmente,

$$f^3(1004) = f^2(1001) = f(998) = f^2(1003) = f(1000) = 997.$$

Utilizando transitividad, $\boxed{f(84) = 997.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Robinson Math Bowl, 2013	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuántos cuadrados perfectos positivos menores que 10^6 son múltiplos de 24? Explique.

Problem. How many positive perfect squares less than 10^6 are multiples of 24? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuántos cuadrados perfectos positivos menores que 10^6 son múltiplos de 24? Explique.

Problem. How many positive perfect squares less than 10^6 are multiples of 24? Explain.

Solución.

Note que $24 = 2^3 \cdot 3$. En la factorización prima de un cuadrado perfecto $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ todos los exponentes deben ser pares. Así que n debe ser un múltiplo de $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Esto es, $n = 144x^2$. Además n tiene que cumplir

$$\begin{aligned} n &< 10^6 \\ 144x^2 &< 10^6 \\ 12x &< 1000 \\ x &< 1000 \div 12 \\ x &< 83.333\ldots \end{aligned}$$

Por lo tanto hay $\boxed{\text{83 cuadrados perfectos}}$ positivos menores que 10^6 que son múltiplos de 24

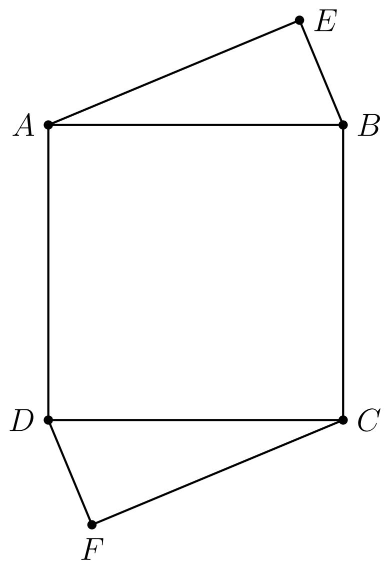
Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El cuadrado $ABCD$ tiene lado que mide 13. Los puntos E y F están en el exterior del cuadrado de modo que $BE = DF = 5$ y $AE = CF = 12$. Encuentre $(EF)^2$. Explique.

Problem. Square $ABCD$ has side length 13. Points E and F are exterior to the square such that $BE = DF = 5$ and $AE = CF = 12$. Find $(EF)^2$. Explain.



Mesa #		Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2013 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El cuadrado $ABCD$ tiene lado que mide 13. Los puntos E y F están en el exterior del cuadrado de modo que $BE = DF = 5$ y $AE = CF = 12$. Encuentre $(EF)^2$. Explique.

Problem. Square $ABCD$ has side length 13. Points E and F are exterior to the square such that $BE = DF = 5$ and $AE = CF = 12$. Find $(EF)^2$. Explain.

Solución.

Extienda FC, EB, EA y FD a través de C, B, A y D, respectivamente. Los dos nuevos triángulos son congruentes a los dos originales $\triangle ABE$ y $\triangle CDF$, todos de lados 5–12–13. Los lados ahora extendidos forman un cuadrado de lado 17 y EF es sencillamente la diagonal que mide, por Pitágoras, $17\sqrt{2}$. Así que,

$$(EF)^2 = \left(17\sqrt{2}\right)^2 = 578.$$