XVII COPA CHAMPAGNAT DE MATEMATICAS
Superior

Iván Cardona Torres, Ph.D.

28 de abril de 2017

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Factorize el entero N.

$$N = 109783.$$

Explique.

Problem. Factor the integer N.

$$N = 109783.$$

Explain.

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Factorize el entero N.

$$N = 109783.$$

Explique.

Problem. Factor the integer N.

$$N = 109783.$$

Explain.

Solución.

Note que,

$$300^2 = 90000 < N < 160000 = 400^2,$$

y que $332^2 = 110224 > N$.

Así que,

$$332^2 - N = 110224 - 109783 = 441.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} N &= 332^2 - 441 \\ &= 332^2 - 21^2 \\ &= (332-21)(332+21) \\ &= 311 \cdot 353 \end{aligned}$$

Mesa #	XVII COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2017		Tiempo : 5 mins.

Problema. Defina $\langle a, b\rangle$ por $\langle a, b\rangle = \frac{a}{a-b}$. Si $\langle s, t\rangle = 10$, ¿cuál es el valor exacto de $\langle t, s\rangle$? Explique.

Problem. Define $\langle a, b\rangle$ by $\langle a, b\rangle = \frac{a}{a-b}$. If $\langle s, t\rangle = 10$, What is the exact value of $\langle t, s\rangle$? Explain.

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Defina $\langle a,b\rangle$ por $\langle a,b\rangle = \frac{a}{a-b}$. Si $\langle s,t\rangle = 10$, ¿cuál es el valor exacto de $\langle t,s\rangle$? Explique.

Problem. Define $\langle a,b\rangle$ by $\langle a,b\rangle = \frac{a}{a-b}$. If $\langle s,t\rangle = 10$, What is the exact value of $\langle t,s\rangle$? Explain.

Solución.

Si $\langle s,t\rangle = 10$, entonces $\frac{s}{s-t} = 10$. Así que,

$$\begin{aligned} \frac{s}{s-t} = 10 \quad &\Longrightarrow \quad s = 10s - 10t \\ &\Longrightarrow \quad 10t = 9s \\ &\Longrightarrow \quad t = \frac{9s}{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle t,s\rangle &= \frac{t}{t-s} \\ &= \frac{\left(\frac{9s}{10}\right)}{\left(\frac{9s}{10}\right) - s} \\ &= \frac{9s}{9s-10s} \\ &= \frac{9s}{-s} \\ &= -9 \end{aligned}$$

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Evalúe

$$\log_2\left(4^{15}+8^{10}\right).$$

Explique.

Problem. Evaluate

$$\log_2\left(4^{15}+8^{10}\right).$$

Explain.

Mesa #	XVII COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Evalúe

$$\log_2\left(4^{15}+8^{10}\right).$$

Explique.

Problem. Evaluate

$$\log_2\left(4^{15}+8^{10}\right).$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\log_2\left(4^{15}+8^{10}\right) &= \log_2\left(\left(2^2\right)^{15}+\left(2^3\right)^{10}\right) \\
&= \log_2\left(2^{30}+2^{30}\right) \\
&= \log_2\left(2\cdot 2^{30}\right) \\
&= \log_2\left(2^{31}\right) \\
&= 31
\end{aligned}$$

Problema. Las tres raíces del polinomio

$$x^3 - 14x^2 + Bx - 84,$$

son los lados de un triángulo rectángulo. Halle el valor de B. Explique.

Problem. The three roots of the polynomial

$$x^3 - 14x^2 + Bx - 84,$$

are also the sides of a right triangle. Find the value of B. Explain.

Mesa #	XVII COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$, son los lados de un triángulo rectángulo. Halle el valor de B. Explique.

Solución.

Sean p, q, r las raíces del polinomio. Suponga (sin perder generalidad) que p, q son los catetos y que r es la hipotenusa del triángulo rectángulo. Entonces,

$$p^2 + q^2 = r^2 \tag{1}$$

De otra parte,

$$\begin{aligned} x^3 - 14x^2 + Bx - 84 &= (x-p)(x-q)(x-r) \\ &= x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+pr+qr)x - pqr \end{aligned}$$

Igualando coeficientes (o utilizando las relaciones de Cardano-Vieta),

$$pqr = 84 \tag{2}$$
$$pq + pr + qr = B \tag{3}$$
$$p + q + r = 14 \tag{4}$$

Haciendo $M = p + q$ y $N = pq$, obtenemos (de las ecuaciones (2), (4) y (1) respectivamente)

$$Nr = 84 \qquad M + r = 14 \qquad M^2 = r^2 + 2N.$$

Escribiendo M y N en términos de r y sustituyendo, obtenemos

$$(14 - r)^2 = r^2 + 2\left(\frac{84}{r}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^2 - 7r + 6 = 0.$$

Así que, $r = 6$ ó 1. Si $r = 1$, utilizando las ecuaciones (2) y (4), surge la cuadrática $p^2 - 13p + 84 = 0$ que no tiene raíces reales. Por lo tanto,

$$r = 6 \qquad N = 14 \qquad M = 8 \qquad B = N + 6M = 62.$$

En efecto, las raíces de $x^3 - 14x^2 + 62x - 84$ son $6, 4 \pm \sqrt{2}$. En fin, $\boxed{B = 62.}$

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, números reales que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 &= 49 \\ x^2 + 8xy + y^2 &= 8y + 17x \end{cases}$$

Encuentre las soluciones del sistema. Explique.

Problem. Let x, y, be real numbers that satisfy the system

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 &= 49 \\ x^2 + 8xy + y^2 &= 8y + 17x \end{cases}$$

Find the solutions of the system. Explain.

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, números reales que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 &= 49 \\ x^2 + 8xy + y^2 &= 8y + 17x \end{cases}$$

Encuentre las soluciones del sistema. Explique.

Solución.

Claramente $x \neq 0$. Dividiendo la primera ecuación por $3x$, obtenemos

$$y^2 = \frac{49}{3x} - \frac{x^2}{3}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 8xy + \frac{49}{3x} - \frac{x^2}{3} &= 8y + 17x \\ 3x^3 + 24x^2y + 49 - x^3 &= 24xy + 51x^2 \\ 2x^3 + 24x^2y + 49 &= 24xy + 49x^2 + 2x^2 \\ 2x^3 + 24x^2y + 49 - 49x &= 24xy + 49x^2 + 2x^2 - 49x \\ 2x^3 + 24x^2y - 49x^2 - 49x &= 2x^2 + 24xy - 49x - 49 \\ x\left(2x^2 + 24xy - 49x - 49\right) &= 2x^2 + 24xy - 49x - 49 \\ (x-1)\left(2x^2 + 24xy - 49x - 49\right) &= 0 \end{aligned}$$

Así que,

$$x - 1 = 0 \qquad \text{ó} \qquad 2x^2 + 24xy - 49x - 49 = 0.$$

Si $x = 1$, entonces $y^2 = 16$. Esto implica que $y = \pm 4$.

Si $2x^2 + 24xy - 49x - 49 = 0$, entonces $2x^2 + 24xy = 49x + 49$. Así que,

$$2x^2 + 24xy = 49x + x^3 + 3xy^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)^2 + 3(y-4)^2 = 0.$$

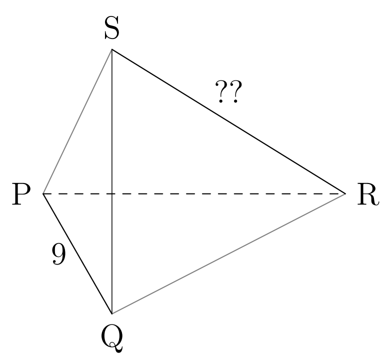
En cuyo caso $x = 1, y = 4$ es una solución.

Por lo tanto, las soluciones son $\boxed{(x, y) \in \{(1, 4), (1, -4)\}}$.

Mesa #	XVII COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2017		Tiempo : 5 mins.

Problema. A cada uno de los cuatro vértices y seis aristas del tetraedro de la figura se le asigna un número de la lista $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ (el 10 no está incluido). Cada número es utilizado exactamente una vez. El número asignado a cada arista es la suma de los números asignados a los dos vértices conectados por la arista. Si le asignamos el 9 a la arista PQ, ¿Cuál número se le debe asignar a la arista RS? Explique.

Problem. Each of the four vertices and six edges of the tetrahedron in the figure is marked with a number from the list $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ (10 is not included). Each number is used exactly once. The number marking each edge is the sum of the numbers marking the vertices connected by the edge. If we mark edge PQ with the number 9, which number is used to mark edge RS? Explain.

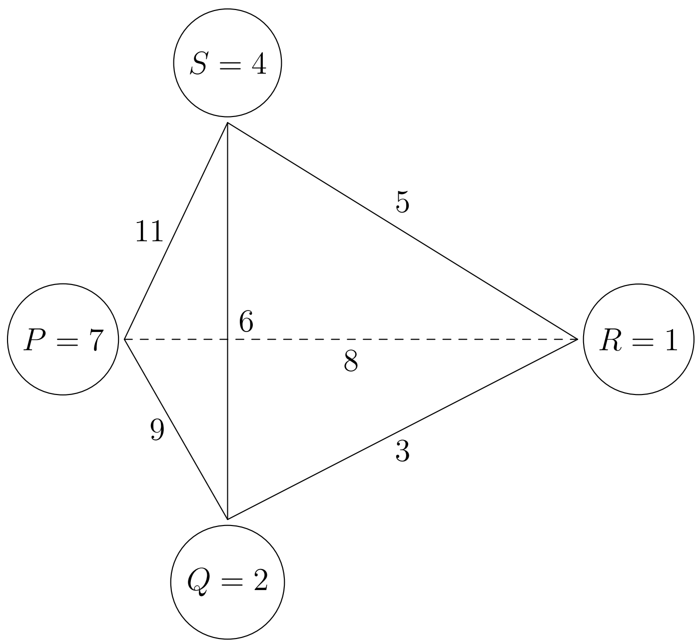


Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. A cada uno de los cuatro vértices y seis aristas del tetraedro de la figura se le asigna un número de la lista $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ (el 10 no está incluido). Cada número es utilizado exactamente una vez. El número asignado a cada arista es la suma de los números asignados a los dos vértices conectados por la arista. Si le asignamos el 9 a la arista PQ, ¿Cuál número se le debe asignar a la arista RS? Explique.

Solución.



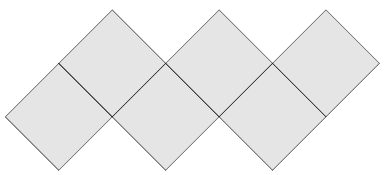
Cualquier otra asignación de números sería “topológicamente” equivalente a la ilustrada. Así que, el número que se le debe asignar a la arista RS es el $\boxed{5.}$

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La figura ilustra una patrón en "*zigzag*" formado por seis cuadrados de lado 1. La región formada tiene perímetro 14. Si continuamos el patrón en "*zigzag*" con 2017 cuadrados de lado 1, ¿cuál es el perímetro de la región formada? Explique.

Problem. The figure shows a "*zigzag*" pattern formed by six squares of side 1. The region formed has a perimeter of length 14. If we continue with the same "*zigzag*" pattern with 2017 squares of side 1, what is the perimeter of the region formed? Explain.

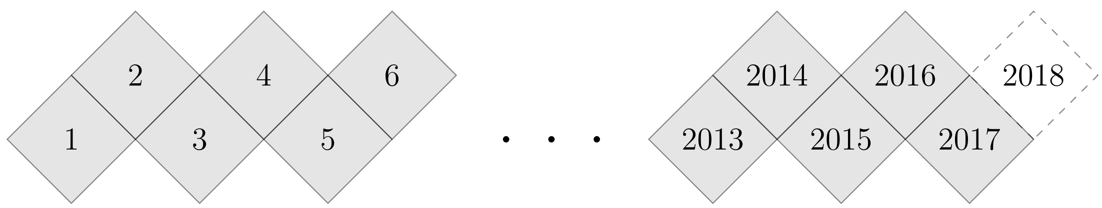


Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La figura ilustra una patrón en "*zigzag*" formado por seis cuadrados de lado 1. La región formada tiene perímetro 14. Si continuamos el patrón en "*zigzag*" con 2017 cuadrados de lado 1, ¿cuál es el perímetro de la región formada? Explique.

Problem. The figure shows a "*zigzag*" pattern formed by six squares of side 1. The region formed has a perimeter of length 14. If we continue with the same "*zigzag*" pattern with 2017 squares of side 1, what is the perimeter of the region formed? Explain.

Solución.



La figura arriba muestra la región formada con 2017 cuadrados, siguiendo el mismo patrón. El cuadrado marcado 2018 no es parte de la figura. Cada uno de los cuadrados marcados desde el 2 hasta el 2016 (que son $2016-2+1 = 2015$ cuadrados) contribuye dos (2) unidades al perímetro de la región. Los cuadrados marcados 1 y 2017 contibuyen tres (3) unidades cada uno al perímetro de la región. Así que la región formada con 2017 cuadrados de lado 1 tiene perímetro

$$P = 2 * (2015) + 3 + 3 = 4036.$$

Mesa #	XVII COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, z números reales positivos tales que $5x, 6y, 7z, \ldots$ es una progresión geométrica y tales que $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ es una progresión aritmética. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$? Explique.

Problem. Let x, y, z be positive real numbers such that $5x, 6y, 7z, \ldots$ is a geometric progression and such that $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ is an arithmetic progression What is the value of $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$? Explain.

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, z números reales positivos tales que $5x, 6y, 7z, \ldots$ es una progresión geométrica y tales que $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ es una progresión aritmética. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$? Explique.

Solución.
Como $5x, 6y, 7z, \ldots$ es una progresión geométrica

$$6y = \sqrt{5x \cdot 7z} = \sqrt{35xz}.$$

Como $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \ldots$ es una progresión aritmética

$$\frac{1}{y} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}{2}.$$

Cuadrando y simplificando un poco las dos ecuaciones arriba,

$$36y^2 = 35xz \qquad (1)$$

$$\frac{4}{y^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz} \qquad (2)$$

Despejando para y^2 en la ecuación (1) y sustituyendo en la ecuación (2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{4 \cdot 36}{35xz} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz} \\
\frac{144 - 70}{35xz} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} \\
\frac{74}{35xz} &= \frac{z^2 + x^2}{x^2 z^2} \\
\frac{74}{35} &= \frac{z^2 + x^2}{xz}
\end{aligned}$$

En este caso, tenemos que

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2 + z^2}{xz} = \frac{74}{35}.$$

Mesa #	XVII COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2017		Tiempo : 5 mins.

Problema. Suponga que, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Encuentre el valor de

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explique.

Problem. Suppose that, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Find the value of

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explain.

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2017		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Encuentre el valor de

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explique.

Problem. Suppose that, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Find the value of

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explain.

Solución.

Note que, $(\sin(u) - \cos(u))^2 = \frac{1}{4}$. Lo que implica que,

$$\begin{aligned} \sin^2(u) - 2\sin(u)\cos(u) + \cos^2(u) &= \frac{1}{4} \\ 1 - \frac{1}{4} &= 2\sin(u)\cos(u) \\ \frac{3}{8} &= \sin(u)\cos(u) \end{aligned}$$

Así que,

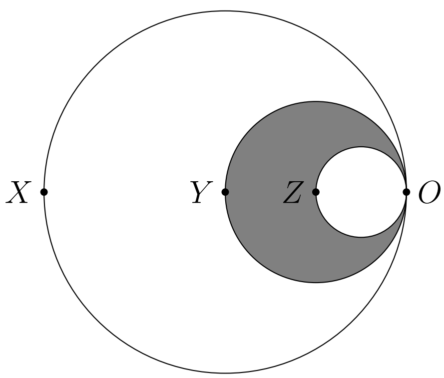
$$\begin{aligned} \sin^3(u) - \cos^3(u) &= (\sin(u) - \cos(u))\left(\sin^2(u) + \sin(u)\cos(u) + \cos^2(u)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sin(u)\cos(u)) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{8}\right) \\ &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura de abajo, tres círculos X, Y y Z son tangentes entre sí en el punto O. El centro de Y está en Z y el centro de X está en Y. Si el radio de Z es $r = \sqrt{5}$, ¿cuál es el área de la región <u>no</u> sombreada? Explique.

Problem. In the figure shown, three circles X, Y and Z are tangent to each other at point O. The center of Y is on Z and the center of X is on Y. If the radius of Z is $r = \sqrt{5}$, what is the area of the <u>unshaded</u> region? Explain.



Mesa #	**XVII COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**

Superior, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

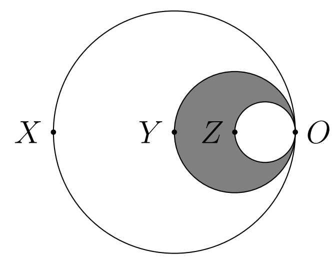
Problema. En la figura de abajo, tres círculos X, Y y Z son tangentes entre sí en el punto O. El centro de Y está en Z y el centro de X está en Y. Si el radio de Z es $r = \sqrt{5}$, ¿cuál es el área de la región <u>no</u> sombreada? Explique.

Problem. In the figure shown, three circles X, Y and Z are tangent to each other at point O. The center of Y is on Z and the center of X is on Y. If the radius of Z is $r = \sqrt{5}$, what is the area of the <u>unshaded</u> region? Explain.

Solución.

Sean (X), (Y) y (Z) las áreas de los círculos X, Y y Z respectivamente. Entonces, el área de la región no sombreada es, claramente

$$(X) - (Y) + (Z)\,.$$



El radio de Z es $r_Z = \sqrt{5}$, el radio de Y es $r_Y = 2\sqrt{5}$ y el radio de X es $r_X = 4\sqrt{5}$. Así que, el área de la región no sombreada es,

$$\begin{aligned}(X) - (Y) + (Z) &= \pi\left(4\sqrt{5}\right)^2 - \pi\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 \\ &= 80\pi - 20\pi + 5\pi = 65\pi\end{aligned}$$