XVI COPA CHAMPAGNAT DE MATEMATICAS
Superior

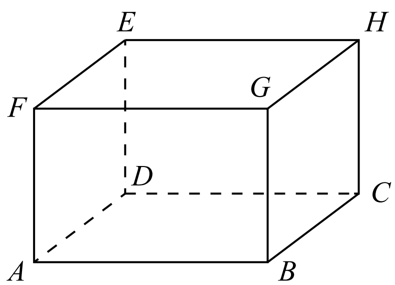
Iván Cardona Torres, Ph.D.

15 de abril de 2016

Mesa #	**XVI COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2016		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La suma de las longitudes de todas las aristas del prisma rectangular $ABCDEFGH$ es 24. Si el área superficial total del prisma es 11, determine la longitud de la diagonal AH. Explique.

Problem. The sum of the lengths of all of the edges of rectangular prism $ABCDEFGH$ is 24. If the total surface area of the prism is 11, determine the length of the diagonal AH. Explain.



Mesa #	**XVI COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2016		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La suma de las longitudes de todas las aristas del prisma rectangular $ABCDEFGH$ es 24. Si el área superficial total del prisma es 11, determine la longitud de la diagonal AH. Explique.

Problem. The sum of the lengths of all of the edges of rectangular prism $ABCDEFGH$ is 24. If the total surface area of the prism is 11, determine the length of the diagonal AH. Explain.

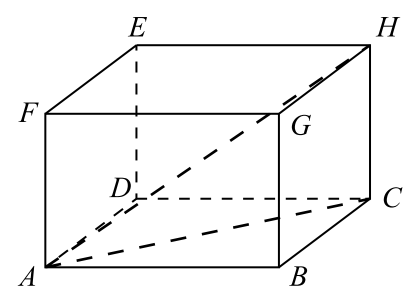
Solución.

Suponga que $AB = x, AD = y$, y que $AF = z$. Como la suma de las longitudes de todas las aristas es 24, entonces

$$4x + 4y + 4z = 24 \quad \text{o} \quad x + y + z = 6.$$

(El prisma tiene 4 aristas de cada longitud.) Como el área superficial es 11, entonces

$$2xy + 2xz + 2yz = 11.$$



(El prisma tiene 2 caras de dimensión x por y, 2 caras de dimensión x por z, y 2 caras de dimensión y por z.) Por el teorema Pitagórico,

$$AH^2 = AC^2 + CH^2.$$

Nuevamente, por el teorema Pitagórico,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

así que, $AH^2 = AB^2 + BC^2 + CH^2$. Pero, $AB = x, BC = AD = y$, y $CH = AF = z$. Por lo tanto, $AH^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Finalmente,

$$(x + y + z)^2 = (x + (y + z))^2 = x^2 + 2x(y + z) + (y + z)^2 = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$$

por ende

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

lo que nos da

$$AH^2 = (x + y + z)^2 - (2xy + 2xz + 2yz) = 6^2 - 11 = 25.$$

Como $AH > 0$, obtenemos que $\boxed{AH = \sqrt{25} = 5.}$

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Considere el polinomio

$$P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 2016x^{2016}.$$

¿Cuál es el residuo al dividir $P(x)$ por $x + 1$? Explique.

Problem. Consider the polynomial

$$P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 2016x^{2016}.$$

What is the remainder when $P(x)$ is divided by $x + 1$? Explain.

Problema. Considere el polinomio

$$P(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 2016x^{2016}.$$

¿Cuál es el residuo al dividir $P(x)$ por $x+1$? Explique.

Solución.

Según el teorema del residuo, el residuo al dividir $P(x)$ por $x - c$ es $P(c)$. Así que, el residuo al dividir $P(x)$ por $x + 1 = x - (-1)$ es,

$$\begin{aligned}
P(-1) &= (-1) + 2(-1)^2 + 3(-1)^3 + \cdots + 2016(-1)^{2016} \\
&= -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots + 2014 - 2015 + 2016 \\
&= -1 + (2-3) + (4-5) + \cdots + (2014 - 2015) + 2016 \\
&= -1 + \underbrace{(-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{1007 \text{ términos}} + 2016 \\
&= -1008 + 2016 \\
&= 1008
\end{aligned}$$

Otra forma,

$$\begin{aligned}
P(-1) &= -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots + 2014 - 2015 + 2016 \\
&= (2 + 4 + 6 + \cdots + 2016) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 2015) \\
&= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1008) - (1 + 3 + 5 + \cdots + (2(1008) - 1)) \\
&= 2 \cdot \frac{1008 \cdot 1009}{2} - (1008)^2 \\
&= 1008(1009 - 1008) \\
&= 1008
\end{aligned}$$

Problema. Encuentre el valor de

$$N = (1 - \cot(20^\circ))(1 - \cot(25^\circ))$$

Explique.

Problem. Find the value of

$$N = (1 - \cot(20^\circ))(1 - \cot(25^\circ))$$

Explain.

Mesa #	**XVI COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2016		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor de

$$N = (1 - \cot(20^\circ))(1 - \cot(25^\circ))$$

Explique.

Problem. Find the value of

$$N = (1 - \cot(20^\circ))(1 - \cot(25^\circ))$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
N = (1 - \cot(20^\circ))(1 - \cot(25^\circ)) &= \left(1 - \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right)\cdot\left(1 - \frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}\right) \\
&= \frac{\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 25^\circ - \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin 20^\circ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 20^\circ\right]}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin 25^\circ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25^\circ\right]}{\sin 25^\circ} \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(20^\circ - 45^\circ)}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(25^\circ - 45^\circ)}{\sin 25^\circ} \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(-25^\circ)}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(-20^\circ)}{\sin 25^\circ} \\
&= \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(25^\circ)}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(20^\circ)}{\sin 25^\circ} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Para cualquier entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n y sea $U(n)$ el dígito de las unidades de n. Por ejemplo, $S(123) = 6$ y $U(123) = 3$. Determine todos los enteros positivos n con la propiedad de que

$$n = S(n) + U(n)^2.$$

Explique.

Problem. For any positive integer n, let $S(n)$ denote the sum of the digits of n and let $U(n)$ be the units digit of n. For example, $S(123) = 6$ and $U(123) = 3$. Determine all positive integers n with the property that

$$n = S(n) + U(n)^2.$$

Explain.

Mesa #	**XVI COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2016		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Para cualquier entero positivo n, sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n y sea $U(n)$ el dígito de las unidades de n. Por ejemplo, $S(123) = 6$ y $U(123) = 3$. Determine todos los enteros positivos n con la propiedad de que

$$n = S(n) + U(n)^2.$$

Explique.

Problem. For any positive integer n, let $S(n)$ denote the sum of the digits of n and let $U(n)$ be the units digit of n. For example, $S(123) = 6$ and $U(123) = 3$. Determine all positive integers n with the property that

$$n = S(n) + U(n)^2.$$

Explain.

Solución.

Suponga que en notación desarrollada tenemos que

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$

Entonces $S(n) = a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0$ y $U(n) = a_0$. Si n satisface la propiedad, obtenemos que,

$$\begin{aligned} n &= S(n) + U(n)^2 \\ a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 &= (a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0) + a_0^2 \\ 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots &= a_0^2 \end{aligned}$$

Como a_0 es un dígito, $a_0^2 \leq 9^2 = 81 < 99$, la última ecuación se reduce a $\boxed{9a_1 = a_0^2.}$ ($a_2, a_3, \ldots$ tienen que ser todos 0, pues de otra manera el lado izquierdo sería mayor a a_0^2)

Examinando la ecuación $9a_1 = a_0^2$ nos damos cuenta que a_0 tiene que ser divisible por 3. Las únicas posiblidades son $a_0 = 3, 6, 9$ y para cada uno de estos casos $a_1 = 1, 4, 9$ respectivamente. Los enteros positivos n que satisfacen la propiedad son

$$n = 13, n = 46 \text{ y } n = 99.$$

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Suponga que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de números reales positivos tales que $0 \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1$ y $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Demuestre que

$$1 \leq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Explique.

Problem. Suppose that $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is a set of positive real numbers such that $0 \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1$ and $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Show that

$$1 \leq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Explain.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de números reales positivos tales que $0 \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1$ y $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Demuestre que

$$1 \leq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Explique.

Problem. Suppose that $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ is a set of positive real numbers such that $0 \leq x_n \leq \cdots \leq x_2 \leq x_1$ and $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Show that

$$1 \leq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Explain.

Solución.

Note que por las condiciones dadas para todo $k \leq n$, tenemos que,

$$kx_k^2 = \underbrace{x_k^2 + x_k^2 + \cdots + x_k^2}_{k \text{ sumandos}} \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1.$$

Esto implica que,

$$x_k \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{y} \quad x_k^2 \leq \frac{x_k}{\sqrt{k}}.$$

Sumando las inecuaciones (la última, para $k = 1, 2, \ldots, n$), obtenemos

$$\begin{aligned} \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} &\leq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} \\ 1 &\leq \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Mesa #	**XVI COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**

Superior, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, y z números reales que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \log_2(xyz - 3 + \log_5 x) &= 5 \\ \log_3(xyz - 3 + \log_5 y) &= 4 \\ \log_4(xyz - 3 + \log_5 z) &= 4 \end{cases}$$

Find the value of $M = |\log_5 x| + |\log_5 y| + |\log_5 z|$. Explique.

Problem. Let x, y, and z be real numbers satisfying the system

$$\begin{cases} \log_2(xyz - 3 + \log_5 x) &= 5 \\ \log_3(xyz - 3 + \log_5 y) &= 4 \\ \log_4(xyz - 3 + \log_5 z) &= 4 \end{cases}$$

Find the value of $M = |\log_5 x| + |\log_5 y| + |\log_5 z|$. Explain.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean $x, y,$ y z números reales que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \log_2(xyz - 3 + \log_5 x) &= 5 \\ \log_3(xyz - 3 + \log_5 y) &= 4 \\ \log_4(xyz - 3 + \log_5 z) &= 4 \end{cases}$$

Find the value of $M = |\log_5 x| + |\log_5 y| + |\log_5 z|$. Explique.

Solución.

Cambiando las ecuaciones a exponenciales,

$$\begin{cases} xyz - 3 + \log_5 x &= 2^5 = 32 \\ xyz - 3 + \log_5 y &= 3^4 = 81 \\ xyz - 3 + \log_5 z &= 4^4 = 256 \end{cases}$$

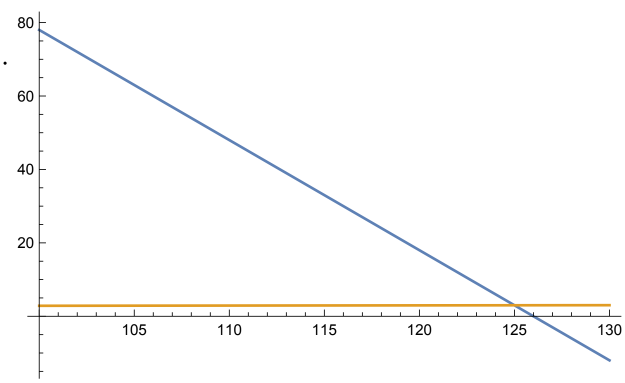
Sumando las ecuaciones y utilizando las propiedades de logaritmos,

$$3xyz + \log_5 xyz = 378.$$

Si ponemos $u = xyz$, esta útima ecuación es equivalente a

$$3u + \log_5(u) = 378 \quad \Longleftrightarrow \quad 5^{3u} \cdot u = 5^{378}.$$

Examinando las potencias de 5, $u = 5^1, 5^2, 5^3, \ldots,$ vemos que $u = 5^3$, satisface la ecuación. Vea las gráficas de $\log_5(u)$ y $378-3u$ en el intervalo $[100, 128]$.



Sustituyendo $u = xyz = 5^3 = 125$ en cada una de las ecuaciones arriba, obtenemos:

$$\log_5 x = -90, \log_5 y = -41, \log_5 z = 134.$$

Sumando ahora los valores absolutos, obtenemos $90 + 41 + 134 = \boxed{265}$.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales que satisface

$$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3,$$

para todo número real x, suponga también que $P(11) = 181$. Encuentre $P(16)$. Explique.

Problem. Let $P(x)$ be a quadratic polynomial with real coefficients satisfying

$$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3,$$

for all real numbers x, and suppose $P(11) = 181$. Find $P(16)$. Explain.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático con coeficientes reales que satisface

$$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3,$$

para todo número real x, suponga también que $P(11) = 181$. Encuentre $P(16)$. Explique.

Solución.

Sean $Q(x) = x^2 - 2x + 2$ y $R(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Completando cuadrados, obtenemos que $Q(x) = (x-1)^2 + 1$, y $R(x) = 2(x-1)^2 + 1$. Así que,

$$P(x) \geq Q(x) \geq 1,$$

para todo x (la última inecuación es trivial).

Sustituyendo $x = 1$,

$$1 = Q(1) \leq P(1) \leq R(1) = 1,$$

por lo tanto $P(1) = 1$, y P alcanza su valor mínimo en el punto $(1, 1)$. Así que $(1, 1)$ es el vértice de la parábola y $P(x)$ tiene la forma $c(x-1)^2 + 1$ para alguna constante c.

Utilizando, $181 = P(11) = 100c + 1$ se obtiene que $c = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$.

Finalmente, sustituyendo $x = 16$, $P(16) = \frac{9}{5} \cdot (16-1)^2 + 1 = 9 \cdot 45 + 1 = \boxed{406}$.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Sean r, s, y t las tres raíces de la ecuación

$$8x^3 + 1001x + 2016 = 0.$$

Encuentre $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$. Explique.

Problem. Let r, s, and t be the three roots of the equation

$$8x^3 + 1001x + 2016 = 0.$$

Find $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$. Explain.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Sean r, s, y t las tres raíces de la ecuación

$$8x^3 + 1001x + 2016 = 0.$$

Encuentre $(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3$. Explique.

Solución.

$$\begin{aligned} 8x^3 + 1001x + 2016 &= 8(x-r)(x-s)(x-t) \\ &= 8\left(x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+rt+st)x - rst\right) \\ &= 8x^3 - 8(r+s+t)x^2 + 8(rs+rt+st)x - 8rst \end{aligned}$$

Igualando coeficientes o utilizando las fórmulas de Vieta, $\boxed{r+s+t=0.}$

Como r es una raíz del polinomio, $8r^3 + 1001r + 2016 = 0 \iff -8r^3 = 1001r + 2016$,
Como s es una raíz del polinomio, $8s^3 + 1001s + 2016 = 0 \iff -8s^3 = 1001s + 2016$,
Como t es una raíz del polinomio, $8t^3 + 1001t + 2016 = 0 \iff -8t^3 = 1001t + 2016$,

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} 8\{(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3\} &= 8\{(-t)^3 + (-r)^3 + (-s)^3\} \\ &= -8(r^3 + s^3 + t^3) \\ &= 1001(r+s+t) + 2016 \cdot 3 = 2016 \cdot 3 \end{aligned}$$

Dividiendo por 8,

$$(r+s)^3 + (s+t)^3 + (t+r)^3 = \frac{2016 \cdot 3}{8} = 756.$$

Mesa #	**XVI COPA CHAMPAGNAT**	**Valor : 10 ptos.**
Superior, 2016		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre todas las soluciones de

$$\sec(x) - 1 = \tan(x).$$

en el intervalo $[0, 7\pi]$. Explique.

Problem. Find all solutions of

$$\sec(x) - 1 = \tan(x).$$

in the interval $[0, 7\pi]$. Explain.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.

Superior, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre todas las soluciones de

$$\sec(x) - 1 = \tan(x).$$

en el intervalo $[0, 7\pi]$. Explique.

Problem. Find all solutions of

$$\sec(x) - 1 = \tan(x).$$

in the interval $[0, 7\pi]$. Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sec(x) - 1 &= \tan(x) \\
\frac{1}{\cos(x)} - 1 &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
1 - \cos(x) &= \sin(x) \\
1 &= \sin(x) + \cos(x)
\end{aligned}$$

Cuadrando ambos lados de esta última ecuación (esto puede que introduzca raíces extrañas), obtenemos

$$\begin{aligned}
1 &= \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) \\
1 &= 1 + 2\sin(x)\cos(x) \\
0 &= 2\sin(x)\cos(x) \\
0 &= \sin(2x)
\end{aligned}$$

Así que, $2x = \pi n$, donde n es un entero. Por lo tanto, $x = \frac{\pi n}{2}$, donde n es un entero. Cuando n es impar $\tan(\frac{\pi n}{2})$ no está definida. Examinando las soluciones de la forma $x = \frac{\pi n}{2}$, donde n es un entero par, podemos ver que las soluciones son $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$.

En el intervalo $[0, 7\pi]$ las soluciones son $\boxed{0, 2\pi, 4\pi, 6\pi.}$

Problema. Encuentre las soluciones de

$$x^{\log_{10}(x)} = \frac{10000}{x^3}.$$

Explique.

Problem. Find all the solutions of

$$x^{\log_{10}(x)} = \frac{10000}{x^3}.$$

Explain.

Mesa #	XVI COPA CHAMPAGNAT	Valor : 10 ptos.
Superior, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Encuentre las soluciones de

$$x^{\log_{10}(x)} = \frac{10000}{x^3}.$$

Explique.

Problem. Find all the solutions of

$$x^{\log_{10}(x)} = \frac{10000}{x^3}.$$

Explain.

Solución.

Note que si A y B son positivos, por la fórmula de cambio de base,

$$\log_A(B) = \frac{\log_B(B)}{\log_B(A)} = \frac{1}{\log_B(A)}.$$

Es claro que si x es una solución $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x^{\log_{10}(x)} &= \frac{10000}{x^3} \\
x^{\log_{10}(x)} \cdot x^3 &= 10000 \\
x^{\log_{10}(x)+3} &= x^{\log_x(10000)} \\
\log_{10}(x) + 3 &= \log_x(10000) = 4\log_x(10) = \frac{4}{\log_{10}(x)} \\
(\log_{10}(x))^2 + 3\log_{10}(x) &= 4
\end{aligned}$$

Si ponemos $u = \log_{10}(x)$, la última ecuación es equivalente a $u^2 + 3u - 4 = 0$. Las soluciones son $u = -4, 1$. Por lo tanto, $\log_{10}(x) = -4, 1$.

$\boxed{\therefore x = 10^{-4}, 10^1.}$