Competencia
Academia San José
2012

17 de febrero de 2012

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que $\log_{11}(5) = A$ y $\log_{11}(13) = B$, exprese $\log_{121}\left(\sqrt{65}\right)$ en términos de A y B. Explique.

Problem. Given that $\log_{11}(5) = A$ and $\log_{11}(13) = B$, express $\log_{125}(11)$ in terms of A and B. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que $\log_{11}(5) = A$ y $\log_{11}(13) = B$, exprese $\log_{121}\left(\sqrt{65}\right)$ en términos de A y B. Explique.

Problem. Given that $\log_{11}(5) = A$ and $\log_{11}(13) = B$, express $\log_{125}(11)$ in terms of A and B. Explain.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\log_{121}\left(\sqrt{65}\right) &= \log_{121}\left(65^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log_{121}(65) \\
&= \frac{1}{2}\log_{121}(5\cdot 13) \\
&= \frac{1}{2}\left(\log_{121}(5) + \log_{121}(13)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\log_{11}(5)}{\log_{11}(121)} + \frac{\log_{11}(13)}{\log_{11}(121)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \\
&= \frac{A}{4} + \frac{B}{4}
\end{aligned}
$$

Problema. Defina una operación binaria sobre los números reales como sigue:

$$a \star b = (a + b) - ab.$$

(i). Evalúe $\frac{7}{8} \star \frac{9}{10}$.

(ii). Encuentre, en términos más simples, un $\frac{p}{q}$ de manera que $\frac{7}{8} \star \frac{p}{q} = 0$. Explique.

Problem. Define a binary operation on the set of real numbers as follows:

$$a \star b = (a + b) - ab.$$

(i). Evaluate $\frac{7}{8} \star \frac{9}{10}$.

(ii). Find, in lowest terms, a $\frac{p}{q}$ such that $\frac{7}{8} \star \frac{p}{q} = 0$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Defina una operación binaria sobre los números reales como sigue:

$$a \star b = (a + b) - ab.$$

(i). Evalúe $\frac{7}{8} \star \frac{9}{10}$.

(ii). Encuentre, en términos más simples, un $\frac{p}{q}$ de manera que $\frac{7}{8} \star \frac{p}{q} = 0$. Explique.

Solución.

(i).

$$\begin{aligned}
\frac{7}{8} \star \frac{9}{10} &= \left(\frac{7}{8} + \frac{9}{10}\right) - \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \\
&= \left(\frac{70 + 72}{80}\right) - \frac{63}{80} \\
&= \frac{142}{80} - \frac{63}{80} \\
&= \frac{79}{80}
\end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned}
\frac{7}{8} \star \frac{p}{q} &= 0 \\
\left(\frac{7q + 8p}{8q}\right) - \frac{7p}{8q} &= 0 \\
7q + p &= 0 \\
p &= -7q
\end{aligned}$$

Así que, $\boxed{\frac{p}{q} = \frac{-7q}{q} = \frac{-7}{1} = -7}$.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Resuelva la ecuación

$$\frac{2012}{2+7^{3x}} = 4.$$

Explique.

Problem. Solve the equation

$$\frac{2012}{2+7^{3x}} = 4.$$

Explain.

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Resuelva la ecuación

$$\frac{2012}{2+7^{3x}} = 4.$$

Explique.

Problem. Solve the equation

$$\frac{2012}{2+7^{3x}} = 4.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{2012}{2+7^{3x}} &= 4 \\
2012 &= 4\left(2+7^{3x}\right) \\
503 &= 2+7^{3x} \\
501 &= 7^{3x} \\
\log_7(501) &= 3x \\
\frac{\log_7(501)}{3} &= x
\end{aligned}$$

En fin,

$$\boxed{x = \frac{\log_7(501)}{3} = \frac{\ln(501)}{3\ln(7)}.}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que $i = \sqrt{-1}$, simplifique

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2012}.$$

Explique.

Problem. Given that $i = \sqrt{-1}$, simplify

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2012}.$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que $i = \sqrt{-1}$, simplifique

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2012}.$$

Explique.

Problem. Given that $i = \sqrt{-1}$, simplify

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2012}.$$

Explain.

Solución.

Recuerde la fórmula de DeMoivre

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2012} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2012} \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2012} \\
&= \cos\left(2012\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2012\cdot\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos(503\pi) + i\sin(503\pi) \\
&= -1 + i\cdot 0 = -1
\end{aligned}$$

Otra forma, L. Euler encontró que $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$ así que,

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2012} = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{2012} = e^{503i} = \cos(503\pi) + i\sin(503\pi) = -1.$$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto de

$$\sin^2(10°) + \sin^2(20°) + \sin^2(30°) + \cdots + \sin^2(80°).$$

Explique.

Problem. Find the exact value of

$$\sin^2(10°) + \sin^2(20°) + \sin^2(30°) + \cdots + \sin^2(80°).$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto de

$$\sin^2(10^\circ) + \sin^2(20^\circ) + \sin^2(30^\circ) + \cdots + \sin^2(80^\circ).$$

Explique.

Problem. Find the exact value of

$$\sin^2(10^\circ) + \sin^2(20^\circ) + \sin^2(30^\circ) + \cdots + \sin^2(80^\circ).$$

Explain.

Solución.

Recuerde que si A y B son ángulos complementarios $\sin(A) = \cos(B)$. En este caso,

$$\sin^2(A) + \sin^2(B) = \cos^2(B) + \sin^2(B) = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sin^2(10^\circ) + \sin^2(20^\circ) + \cdots + \sin^2(80^\circ) &= \left\{\begin{array}{lcl} \sin^2(10^\circ) & + & \sin^2(80^\circ) \\ \sin^2(20^\circ) & + & \sin^2(70^\circ) \\ \sin^2(30^\circ) & + & \sin^2(60^\circ) \\ \sin^2(40^\circ) & + & \sin^2(50^\circ) \end{array}\right. \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 1 & + \\ 1 & + \\ 1 & + \\ 1 & \end{array}\right. \\
&= 4
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que para todo número real x, $f(x)$ satisface:

$$f(-x) + 3f(x) = \sin(x).$$

Encuentre $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Explique.

Problem. Suppose that for every real number x, $f(x)$ satisfies:

$$f(-x) + 3f(x) = \sin(x).$$

Find $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que para todo número real x, $f(x)$ satisface:

$$f(-x) + 3f(x) = \sin(x).$$

Encuentre $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Explique.

Problem. Suppose that for every real number x, $f(x)$ satisfies:

$$f(-x) + 3f(x) = \sin(x).$$

Find $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Explain.

Solución.

La función $\sin(x)$ es impar. Así que,

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Lo que implica que,

$$\begin{aligned} f(x) + 3f(-x) &= -\left(f(-x) + 3f(x)\right) \\ &= -f(-x) - 3f(x) \end{aligned}$$

Entonces,

$$4f(x) = -4f(-x) \Longrightarrow f(-x) = -f(x).$$

Sustituyendo en la identidad original,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ -f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ son las raíces de

$$x^2 - bx + c = 0.$$

Exprese b^2 en términos de c. Explique.

Problem. Suppose that, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ and $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ are roots of

$$x^2 - bx + c = 0.$$

Express b^2 in terms of c. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ son las raíces de

$$x^2 - bx + c = 0.$$

Exprese b^2 en términos de c. Explique.

Problem. Suppose that, $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ and $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ are roots of

$$x^2 - bx + c = 0.$$

Express b^2 in terms of c. Explain.

Solución.

Si p, q son las raíces de $x^2 - bx + c = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x^2 - bx + c &= (x-p)(x-q) \\ &= x^2 - (p+q)x + pq \end{aligned}$$

Así que, $b = p + q$ y $c = pq$.

$$\begin{aligned} b^2 &= (p+q)^2 \\ &= p^2 + q^2 + 2pq \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2c \\ &= 1 + 2c \end{aligned}$$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que tenemos 5 puntos en un cuadrado cuyo lado tiene longitud 2. Demuestre que hay al menos dos puntos entre ellos cuya distancia es menor o igual a $\sqrt{2}$. Explique.

Problem. Suppose that we have 5 points in a square of side length 2. Show that there are at least two of them having a distance less than or equal to $\sqrt{2}$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

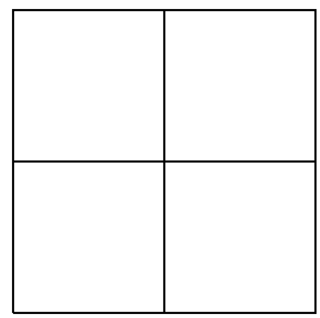
Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que tenemos 5 puntos en un cuadrado cuyo lado tiene longitud 2. Demuestre que hay al menos dos puntos entre ellos cuya distancia es menor o igual a $\sqrt{2}$. Explique.

Problem. Suppose that we have 5 points in a square of side length 2. Show that there are at least two of them having a distance less than or equal to $\sqrt{2}$. Explain.

Solución.

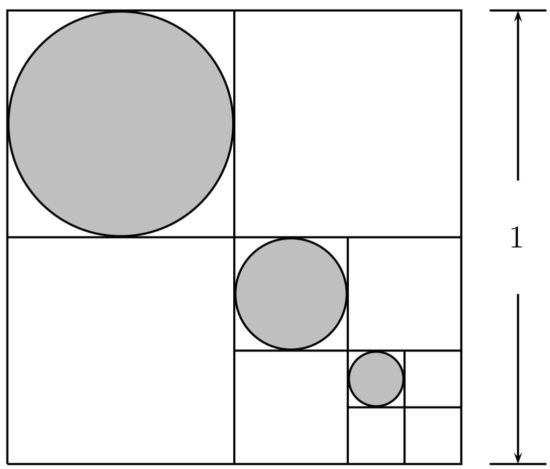
Divida el cuadrado en cuatro cuadrados de lado de largo 1 como en la figura:
Por el principio del palomar ("Pidgeon Hole Principle"), si los cuadrados son los nidos y los puntos las palomas, al haber más palomas (5 puntos) que nidos (4 cuadrados de lado 1), tiene que haber un nido con dos o más palomas. Esto es, tiene que haber un cuadrado de lado 1 con dos o más puntos. La distancia entre esos dos puntos es menor que lo que mide la diagonal de un cuadrado de lado 1, a saber $\sqrt{2}$. Esto es lo que había que demostrar.



Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, el cuadrado de lado de largo 1 es subdividido y tres círculos son inscritos como se ilustra. Encuentre la suma de las áreas de los tres círculos. Explique.

Problem. In the figure, the unit square is subdivided and three circles are inscribed as shown. Find the sum of the area of the three circles. Explain.

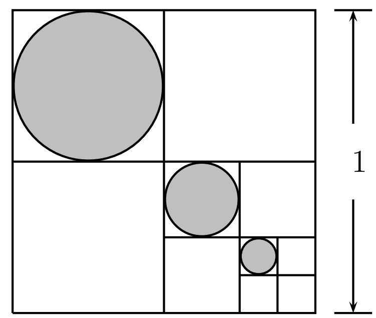


Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, el cuadrado de lado de largo 1 es subdividido y tres círculos son inscritos como se ilustra. Encuentre la suma de las áreas de los tres círculos. Explique.

Problem. In the figure, the unit square is subdivided and three circles are inscribed as shown. Find the sum of the area of the three circles. Explain.

Solución.



El área de un círculo cuyo diámetro es d está dada por

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2.$$

De la figura, obtenemos que los diámetros de los tres círculos en orden descendente son $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{4}$ y $d_3 = \frac{1}{8}$. La suma de las áreas de los tres círculos es:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2.$$

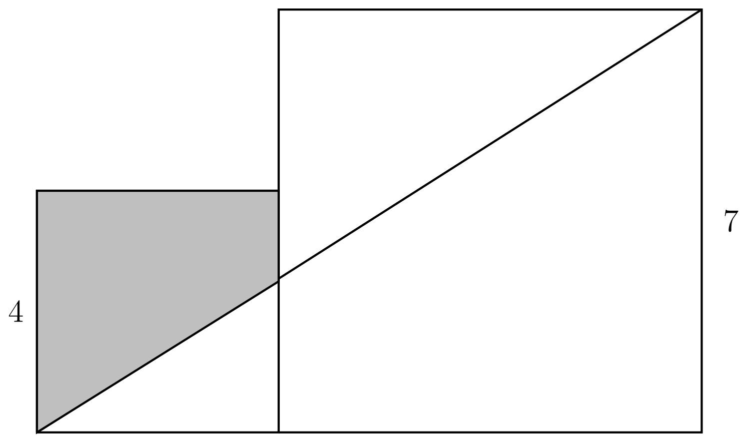
Factorizando $\frac{\pi}{4}$, obtenemos:

$$S = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{16+4+1}{64}\right] = \frac{21\pi}{256}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, los dos cuadrados tienen lado de largo 4 y 7 respectivamente. Determine el área de la región sombreada. Explique.

Problem. In the figure shown, the two squares have side length of 4 and 7 respectively. Determine the area of the shaded region. Explain.



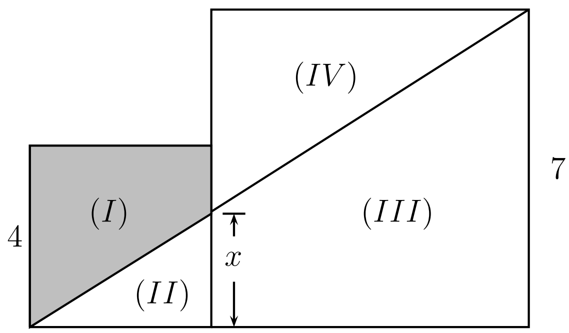
Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, los dos cuadrados tienen lado de largo 4 y 7 respectivamente. Determine el área de la región sombreada. Explique.

Solución.



Denote por (I), (II), (III) y (IV) las áreas de las regiones ilustradas en la figura a la izquierda. Sea x la altura del triángulo cuya área es (II). Entonces,

$$(I) + (II) = 16$$

y

$$(III) + (IV) = 49.$$

Considerando los triángulos, obtenemos

$$(II) = \frac{1}{2}(4)(x) = 2x,$$

$$(IV) = \frac{1}{2}(7)(7 - x) = \frac{1}{2}(49 - 7x) = \frac{49}{2} - \frac{7x}{2},$$

y

$$(II) + (III) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 7 = \frac{77}{2}.$$

De otra parte, como $(III) + (IV) = 49$,

$$(III) = 49 - \left(\frac{49}{2} - \frac{7x}{2}\right) = \frac{49}{2} + \frac{7x}{2}.$$

Ahora bien, como $(II) + (III) = \frac{77}{2}$,

$$\begin{aligned} 2x + \frac{49}{2} + \frac{7x}{2} &= \frac{77}{2} \\ 4x + 49 + 7x &= 77 \\ 11x &= 28 \\ x &= \frac{28}{11} \end{aligned}$$

En fin,

$$(I) = 16 - (II) = 16 - 2x = 16 - \frac{56}{11} = \frac{176 - 56}{11} = \frac{120}{11}.$$