Competencia
Academia San José, 2010

Iván Cardona Torres, Ph.D.

19 de febrero de 2010

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean p, q, r las raíces de la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$. Encuentre el valor exacto del entero N, si

$$N = p^4 + q^4 + r^4.$$

Explique.

Problem. Let p, q, r be the roots of the equation $x^3 - x + 1 = 0$. Find the exact value of integer N, if

$$N = p^4 + q^4 + r^4.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean p, q, r las raíces de la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$. Encuentre el valor exacto del entero N, si

$$N = p^4 + q^4 + r^4.$$

Explique.

Problem. Let p, q, r be the roots of the equation $x^3 - x + 1 = 0$. Find the exact value of integer N, if

$$N = p^4 + q^4 + r^4.$$

Explain.

Solución.

Sean p, q, r las raíces de la ecuación. Entonces, por el teorema del factor

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= (x-p)(x-q)(x-r) \\ &= x^3 - (p+q+r)x^2 + (pr+pq+qr)x - (pqr) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos $p + q + r = 0$ y $pr + pq + qr = -1$. Sustituyendo en la identidad

$$(p+q+r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pr + pq + qr),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= (0)^2 - 2(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por ser p, q, r raíces de la ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcl} p^3 - p + 1 &=& 0 \\ q^3 - q + 1 &=& 0 \\ r^3 - r + 1 &=& 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} p^3 &=& p - 1 \\ q^3 &=& q - 1 \\ r^3 &=& r - 1 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} p^4 &=& p^2 - p \\ q^4 &=& q^2 - q \\ r^4 &=& r^2 - r \end{array}\right.$$

Sumando las columnas de este último arreglo,

$$\begin{aligned} N &= p^4 + q^4 + r^4 \\ &= p^2 + q^2 + r^2 - (p+q+r) \\ &= 2 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 3. Suponga además que

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P(3) = 5, \quad P(4) = 7 \quad \text{y} \quad P(5) = 9.$$

¿Cuál es el valor de $P(6)$? Explique.

Problem. Suppose that $P(x)$ is a polynomial of degree 5 with leading coefficient 3. Suppose further that

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P(3) = 5, \quad P(4) = 7 \quad \text{and} \quad P(5) = 9.$$

What is the value of $P(6)$? Explain.

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**

Academia San José, 2010 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $P(x)$ es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 3. Suponga además que

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P(3) = 5, \quad P(4) = 7 \quad \text{y} \quad P(5) = 9.$$

¿Cuál es el valor de $P(6)$? Explique.

Problem. Suppose that $P(x)$ is a polynomial of degree 5 with leading coefficient 3. Suppose further that

$$P(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P(3) = 5, \quad P(4) = 7 \quad \text{and} \quad P(5) = 9.$$

What is the value of $P(6)$? Explain.

Solución.

Defina $g(x) = P(x) - 2x + 1$. Entonces, por la información dada,

$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = g(5) = 0.$$

También, como $P(x)$ (por ende $g(x)$) es un polinomio de grado 5 con coeficiente principal 3,

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5).$$

Así que $g(6) = 3 \cdot 5! = 360$ y como $g(6) = P(6) - 11$, deducimos que $\boxed{P(6) = 371.}$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto del entero M, si

$$M = \frac{\log_2(3) \cdot \log_4(5) \cdot \log_6(7)}{\log_4(3) \cdot \log_6(5) \cdot \log_8(7)}.$$

Explique.

Problem. Find the exact value of integer M, if

$$M = \frac{\log_2(3) \cdot \log_4(5) \cdot \log_6(7)}{\log_4(3) \cdot \log_6(5) \cdot \log_8(7)}.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto del entero M, si

$$M = \frac{\log_2(3) \cdot \log_4(5) \cdot \log_6(7)}{\log_4(3) \cdot \log_6(5) \cdot \log_8(7)}.$$

Explique.

Problem. Find the exact value of integer M, if

$$M = \frac{\log_2(3) \cdot \log_4(5) \cdot \log_6(7)}{\log_4(3) \cdot \log_6(5) \cdot \log_8(7)}.$$

Explain.

Solución.

Utilizando la fórmula de cambio de base,

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\log_2(3) \cdot \log_4(5) \cdot \log_6(7)}{\log_4(3) \cdot \log_6(5) \cdot \log_8(7)} \\
&= M = \frac{\frac{\log_b(3)}{\log_b(2)} \cdot \frac{\log_b(5)}{\log_b(4)} \cdot \frac{\log_b(7)}{\log_b(6)}}{\frac{\log_b(3)}{\log_b(4)} \cdot \frac{\log_b(5)}{\log_b(6)} \cdot \frac{\log_b(7)}{\log_b(8)}} \\
&= \frac{\log_b(8)}{\log_b(2)} \\
&= \frac{3 \cdot \log_b(2)}{\log_b(2)} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $\sin(\alpha) = 3/5$. Verifique que

$$a = 5^{2010} \sin(2010 \cdot \alpha),$$

es un entero. Explique.

Problem. Suppose that $\sin(\alpha) = 3/5$. Verify that

$$a = 5^{2010} \sin(2010 \cdot \alpha),$$

is an integer. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $\sin(\alpha) = 3/5$. Verifique que

$$a = 5^{2010} \sin(2010 \cdot \alpha),$$

es un entero. Explique.

Problem. Suppose that $\sin(\alpha) = 3/5$. Verify that

$$a = 5^{2010} \sin(2010 \cdot \alpha),$$

is an integer. Explain.

Solución.

$$\sin(\alpha) = 3/5 \quad \Longrightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm 4/5.$$

Defina

$$p_n = 5^n \sin(n \cdot \alpha) \quad \text{y} \quad q_n = 5^n \cos(n \cdot \alpha).$$

Utilizando las identidades de suma,

$$\begin{aligned} \sin((n+1) \cdot \alpha) &= \sin(\alpha)\cos(n \cdot \alpha) + \cos(\alpha)\sin(n \cdot \alpha) \\ \cos((n+1) \cdot \alpha) &= \cos(\alpha)\cos(n \cdot \alpha) - \sin(\alpha)\sin(n \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Entonces, $p_1 = 3$ y $q_1 = \pm 4$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \pm 4 p_n + 3 q_n \\ q_{n+1} &= -3 p_n \pm q_n \end{aligned}$$

Así que, p_1, q_1 enteros y las fórmulas recursivas de arriba implican que p_2, q_2 son enteros. De igual forma, p_2, q_2 enteros y las fórmulas recursivas implican que p_3, q_3 son enteros. De igual forma, p_3, q_3 enteros y las fórmulas recursivas implican que p_4, q_4 son enteros. Continuando de esta manera, obtenemos que p_{2010}, q_{2010} son enteros.

Por lo tanto, $a = p_{2010}$ es un entero.

Mesa #	

Valor : 8 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales. Dado que $f(f(f(x))) = 8x + 21$, ¿cuál es el valor de $a + b$? Explique.

Problem. Suppose that $f(x) = ax + b$, where a and b are real numbers. Given that $f(f(f(x))) = 8x + 21$, what is the value of $a + b$? Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales. Dado que $f(f(f(x))) = 8x + 21$, ¿cuál es el valor de $a + b$? Explique.

Problem. Suppose that $f(x) = ax + b$, where a and b are real numbers. Given that $f(f(f(x))) = 8x + 21$, what is the value of $a + b$? Explain.

Solución.

Por hipótesis,

$$f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1).$$

También,

$$f(f(f(x))) = a\left(a^2x + b(a + 1)\right) + b = a^3x + b\left(a^2 + a + 1\right).$$

Como esto último debe ser igual a $8x + 21$, $a^3 = 8$ y $b\left(a^2 + a + 1\right) = 21$.

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 21/7 = 3$ y $\boxed{a + b = 5.}$

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Simplifique

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(9)}.$$

Explique.

Problem. Simplify

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(9)}.$$

Explain.

Mesa # **Valor : 8 ptos.**

Academia San José, 2010 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Simplifique

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(9)}.$$

Explique.

Problem. Simplify

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(9)}.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(9)} &= \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(3^2)} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot\log_2(3)} \\
&= \left(2^{1/2}\right)^{2\cdot\log_2(3)} \\
&= (2)^{\log_2(3)} \\
&= 3
\end{aligned}$$

| Mesa # |

Valor : 8 ptos.

Academia San José, 2010

Tiempo : 4 mins.

Problema. Encuentre los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\cos(2\theta) + \cos(\theta) = 0.$$

Explique.

Problem. Find the angles θ in the interval $[0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\cos(2\theta) + \cos(\theta) = 0.$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**
Academia San José, 2010	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Encuentre los ángulos θ en el intervalo $[0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\cos(2\theta) + \cos(\theta) = 0.$$

Explique.

Problem. Find the angles θ in the interval $[0, 2\pi)$ que satisfacen

$$\cos(2\theta) + \cos(\theta) = 0.$$

Explain.

Solución.

Sea $u = \cos(\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) + \cos(\theta) &= 0 \\ 2\cos^2(\theta) - 1 + \cos(\theta) &= 0 \\ 2u^2 + u - 1 &= 0 \\ (2u - 1)(u + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Así que $u = 1/2$ o $u = -1$, lo que implica que $\cos(\theta) = 1/2$ o $\cos(\theta) = -1$.

Los ángulos son $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi.}$

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Academia San José, 2010 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál número es mayor 90^{80} ú 80^{90}? Explique.

Problem. Which number is larger 90^{80} or 80^{90}? Explain.

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2010		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál número es mayor 90^{80} ú 80^{90}? Explique.

Problem. Which number is larger 90^{80} or 80^{90}? Explain.

Solución.

Recuerde que $3^3 = 27$ y $2^5 = 32$.

$$\begin{aligned}
3^3 < 2^5 &\implies \left(3^3\right)^5 < \left(2^5\right)^5 \\
&\implies 3^{15} < 2^{25} \\
&\implies 3^{15} \cdot 3 < 2^{25} \cdot 4 \\
&\implies 3^{16} < 2^{27} \\
&\implies \left(3^2\right)^8 < \left(2^3\right)^9 \\
&\implies 9^8 < 8^9 \\
&\implies 9^{80} = \left(9^8\right)^{10} < \left(8^9\right)^{10} = 8^{90} \\
&\implies 9^{80} \cdot (10)^{80} < 8^{90} \cdot (10)^{80} < 8^{90} \cdot (10)^{90} \\
&\implies (90)^{80} < (80)^{90}
\end{aligned}$$

Otra forma. $9^8 = 43,046,721$, $8^9 = 134,217,728$ y ahora continue como arriba.
Otra forma.

$90^{80} =$ 21847450052839212624230656502990235142567050104912751880812823948662932355201000000-
00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
y
$80^{90} =$ 18971375900641885458197870183823426822679754287618550012224730563856487160207114240-
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000-
0000000

En cualquier caso 80^{90} es mayor que 90^{80}.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Los seis puntos A, B, C, D, E, F están espaciados igualmente a lo largo de la circunferencia de un círculo de radio 1. Dibujamos segmentos de recta $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{DF}, \overline{BF}$, y sombreamos la región que tiene forma de estrella. ¿Cuál es el área de la región sombreada? Explique.

Problem. The six points A, B, C, D, E, F are equally spaced along the circumference of a circle of radius 1. Line segments $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{DF}, \overline{BF}$ are drawn, and the resulting star-shaped region is shaded in. What is the area of the shaded region? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Los seis puntos A, B, C, D, E, F están espaciados igualmente a lo largo de la circunferencia de un círculo de radio 1. Dibujamos segmentos de recta $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{DF}, \overline{BF}$, y sombreamos la región que tiene forma de estrella. ¿Cuál es el área de la región sombreada? Explique.

Problem. The six points A, B, C, D, E, F are equally spaced along the circumference of a circle of radius 1. Line segments $\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{DF}, \overline{BF}$ are drawn, and the resulting star-shaped region is shaded in. What is the area of the shaded region? Explain.

Solución.

Sean O el centro del círculo, G la intersección de $\overline{EA}$ y $\overline{FD}$, y H la intersección de $\overline{EC}$ y $\overline{FD}$. Como $OE = 1$, la altura del triángulo equilátero $\triangle EGH$ es $1/2$. Por lo tanto, $\triangle EGH$ tiene lado $\sqrt{3}/3$ y área $\sqrt{3}/12$. La región sombreada consiste de doce (12) triángulos equiláteros cada uno congruente a $\triangle EGH$. Así que, el área de la región sombreada es

$$\sqrt{3}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2010	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es la altura de un pentágono cuyos lados miden 1? Explique.

Problem. What is the height of a pentagon with side length 1? Explain.

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2010 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es la altura de un pentágono cuyos lados miden 1? Explique.

Solución.

Sean x la altura del pentágono y a la longitud de las extensiones de los lados, como indica la figura de la derecha. Por el teorema Pitagórico

$$x^2 + (a + 1/2)^2 = (a + 1)^2.$$

Esto implica que

$$x^2 = a + 3/4.$$

Ahora, considere las dos cuerdas añadidas en la figura de la izquierda. El triángulo formado por estas dos cuerdas y un lado del pentágono es congruente al triángulo formado por las dos extensiones de largo a y el mismo lado del pentágono. De aquí, obtenemos que la distancia entre dos vértices no adyacentes del pentágono, también es a. Considere la cuerda que va desde uno de los vértices en la base del pentágono hasta el vértice que nos da la altura (línea entrecortada). De nuevo, por el teorema Pitagórico

$$x^2 + (1/2)^2 = a^2.$$

Combinando las últimas dos ecuaciones,

$$\begin{aligned} a + 3/4 &= a^2 - (1/2)^2 \\ 0 &= a^2 - a - 1 \end{aligned}$$

Como $a > 0$,

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esto implica que

$$x = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}.$$