Colegio Espíritu Santo
2019

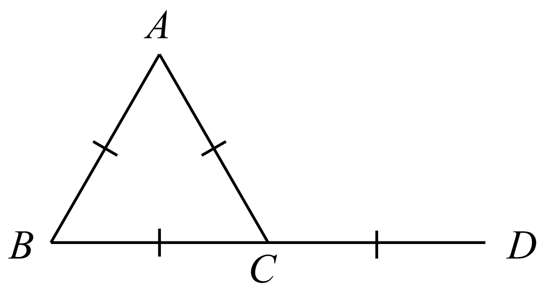
1 de noviembre de 2019

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el diagrama, $BD = 4$ y el punto C es el punto medio de BD. Si el punto A es colocado tal que $\triangle ABC$ es equilátero, ¿cuál es la longitud de AD? Explique.

Problem. In the diagram, $BD = 4$ and point C is the midpoint of BD. If point A is placed so that $\triangle ABC$ is equilateral, what is the length of AD? Explain.



Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

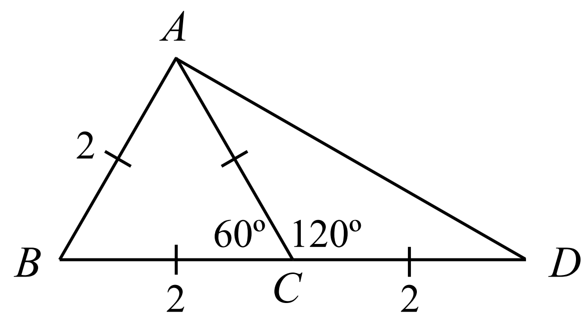
Problema. En el diagrama, $BD = 4$ y el punto C es el punto medio de BD. Si el punto A es colocado tal que $\triangle ABC$ es equilátero, ¿cuál es la longitud de AD? Explique.

Problem. In the diagram, $BD = 4$ and point C is the midpoint of BD. If point A is placed so that $\triangle ABC$ is equilateral, what is the length of AD? Explain.

Solución.

Dibuje el segmento AD. Como $BC = CD$ y $BD = 4$, entonces $BC = CD = 2$. Además, $AC = CD = 2$. Como $\angle ACB = 60°$, entonces

$\angle ACD = 180° - \angle ACB = 180° - 60° = 120°$.



Por la ley de cosenos, aplicada a $\triangle ACD$,

$$
\begin{aligned}
AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2\,(AC)\,(CD)\cos(\angle ACD) \\
&= 2^2 + 2^2 - 2\,(2)\,(2)\cos(120°) \\
&= 4 + 4 - 8\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

Como $AD^2 = 12$ y $AD > 0$, entonces $AD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que $T = 2019$, ¿cuántos dígitos tiene el siguiente entero positivo M?

$$M = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[T]{10^{T^2-9T}}}}.$$

Explique.

Problem. Given that $T = 2019$, how many digits does the following positive integer M have?

$$M = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[T]{10^{T^2-9T}}}}.$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que $T = 2019$, ¿cuántos dígitos tiene el siguiente entero positivo M?

$$M = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[T]{10^{T^2-9T}}}}.$$

Explique.

Problem. Given that $T = 2019$, how many digits does the following positive integer M have?

$$M = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[T]{10^{T^2-9T}}}}.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
M &= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[T]{10^{T^2-9T}}}} \\
&= \left(\left(\left(10^{T^2-9T}\right)^{\frac{1}{T}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 10^{\frac{T^2-9T}{6T}} \\
&= 10^{\frac{T-9}{6}} \\
&= 10^{\frac{2019-9}{6}} \\
&= 10^{\frac{2010}{6}} \\
&= 10^{335}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, M tiene $\boxed{335 + 1 = 336 \text{ dígitos.}}$

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Escriba

$$M = \sqrt{264\sqrt{6} + 286\sqrt{10} + 312\sqrt{15} + 1519}\ ,$$

de la forma $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, donde a, b y c son enteros positivos. Explique.

Problem. Write

$$M = \sqrt{264\sqrt{6} + 286\sqrt{10} + 312\sqrt{15} + 1519}\ ,$$

in the form $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, where a, b and c are positive integers. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Escriba

$$M = \sqrt{264\sqrt{6} + 286\sqrt{10} + 312\sqrt{15} + 1519}\ ,$$

de la forma $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, donde a, b y c son enteros positivos. Explique.

Problem. Write

$$M = \sqrt{264\sqrt{6} + 286\sqrt{10} + 312\sqrt{15} + 1519}\ ,$$

in the form $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$, where a, b and c are positive integers. Explain.

Solución.
Recuerde,

$$(x+y+z)^2 \quad = \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Así que, según la definición de M, si $M = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$,

$$\begin{aligned} M^2 = \left(a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}\right)^2 &= 2a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 2ab\sqrt{6} + 2ac\sqrt{10} + 2bc\sqrt{15} \\ &= 264\sqrt{6} + 286\sqrt{10} + 312\sqrt{15} + 1519 \end{aligned}$$

Como a, b, c son enteros positivos,

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2ab &=& 264 \\ 2ac &=& 286 \\ 2bc &=& 312 \\ 2a^2 + 3b^2 + 5c^2 &=& 1519 \end{array} \right. .$$

De la primera y segunda ecuación obtenemos $\dfrac{c}{b} = \dfrac{13}{12}$. Multiplicando esta última ecuación por la tercera ecuación del sistema, obtenemos

$$2c^2 = 338 = 2 \cdot 13^2.$$

Lo que implica que $c = 13, b = 12$. Luego, sustituyendo $b = 12$ en la primera ecuación del sistema, $24a = 264 \Longrightarrow a = \frac{264}{24} = 11$. Es claro que el triple $(a, b, c) = (11, 12, 13)$ satisface,

$$2a^2 + 3b^2 + 5c^2 \quad = \quad 2(121) + 3(144) + 5(169) = 242 + 432 + 845 = 1519$$

Por lo tanto, $\boxed{M = 11\sqrt{2} + 12\sqrt{3} + 13\sqrt{5}.}$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea F_n el enésimo número en la sucesión de Fibonacci. Esto es, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$. Los primeros 15 números de Fibonacci son $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}$. Encuentre un número real $x > 0$ tal que

$$F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots + F_nx^n + \cdots = 1.$$

Explique.

Problem. Let F_n be the nth number in the Fibonacci sequence. That is, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for $n \geq 1$. The first 15 Fibonacci numbers are $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}$. Find a real number $x > 0$ such that

$$F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots + F_nx^n + \cdots = 1.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea F_n el enésimo número en la sucesión de Fibonacci. Esto es, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$. Los primeros 15 números de Fibonacci son $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}$. Encuentre un número real $x > 0$ tal que

$$F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots + F_nx^n + \cdots = 1.$$

Explique.

Solución.

Sea $x = \frac{1}{b}$, donde b es un número real positivo. Defina S como sigue:

$$\begin{aligned} S &= F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots + F_nx^n + \cdots \\ &= \frac{F_1}{b^1} + \frac{F_2}{b^2} + \frac{F_3}{b^3} + \cdots + \frac{F_n}{b^n} + \cdots \end{aligned}$$

Multiplicando por b y por b^2,

$$\begin{aligned} bS &= F_1 + \frac{F_2}{b^1} + \frac{F_3}{b^2} + \frac{F_4}{b^3} + \frac{F_5}{b^4} + \cdots \\ b^2S &= bF_1 + F_2 + \frac{F_3}{b^1} + \frac{F_4}{b^2} + \frac{F_5}{b^3} + \cdots \end{aligned}$$

Así que,

$$b^2S - bS - S = bF_1 + (F_2 - F_1) + \frac{1}{b}(F_3 - F_2 - F_1) + \frac{1}{b^2}(F_4 - F_3 - F_2) + \frac{1}{b^3}(F_5 - F_4 - F_3) + \cdots.$$

Note que de la fórmula recursiva $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, obtenemos $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ para $n \geq 1$. Por lo tanto,

$$b^2S - bS - S = bF_1 + (F_2 - F_1) = b \cdot 1 + (1 - 1) = b$$

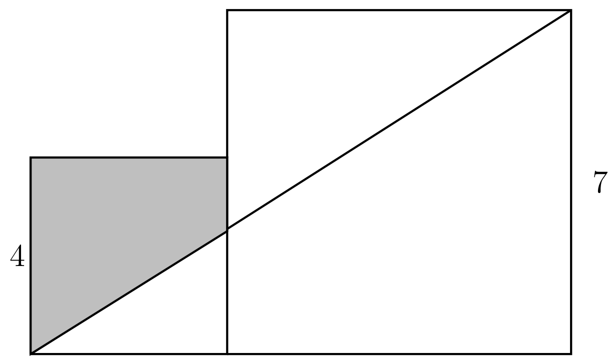
Queremos b de modo que $S = 1$, esto es $b^2 - b - 1 = b$. Las soluciones de esta cuadrática son $b = 1 \pm \sqrt{2}$. Como $b > 0$, tenemos que $b = 1 + \sqrt{2} \Longrightarrow$

$$\boxed{x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, los dos cuadrados tienen lado de largo 4 y 7 respectivamente. Determine el área de la región sombreada. Explique.

Problem. In the figure shown, the two squares have side length of 4 and 7 respectively. Determine the area of the shaded region. Explain.



Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, los dos cuadrados tienen lado de largo 4 y 7 respectivamente. Determine el área de la región sombreada. Explique.

Solución.

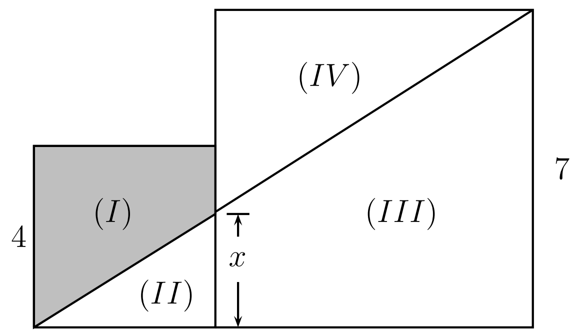
Denote por (I), (II), (III) y (IV) las áreas de las regiones ilustradas en la figura a la derecha. Sea x la altura del triángulo cuya área es (II). Entonces,

$$(I) + (II) = 16$$

y

$$(III) + (IV) = 49.$$

Considerando los triángulos, obtenemos



$$(II) = \frac{1}{2}(4)(x) = 2x,$$

$$(IV) = \frac{1}{2}(7)(7-x) = \frac{1}{2}(49-7x) = \frac{49}{2} - \frac{7x}{2},$$

y

$$(II) + (III) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 7 = \frac{77}{2}.$$

De otra parte, como $(III) + (IV) = 49$,

$$(III) = 49 - \left(\frac{49}{2} - \frac{7x}{2}\right) = \frac{49}{2} + \frac{7x}{2}.$$

Ahora bien, como $(II) + (III) = \frac{77}{2}$,

$$\begin{aligned} 2x + \frac{49}{2} + \frac{7x}{2} &= \frac{77}{2} \\ 4x + 49 + 7x &= 77 \\ 11x &= 28 \\ x &= \frac{28}{11} \end{aligned}$$

En fin,

$$(I) = 16 - (II) = 16 - 2x = 16 - \frac{56}{11} = \frac{176-56}{11} = \frac{120}{11}.$$

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor del ángulo agudo θ que satisface la ecuación,

$$\cos(73^\circ) + \cos(47^\circ) = \cos(\theta)?$$

Explique.

Problem. What is the value of the acute angle θ that satisfies the equation,

$$\cos(73^\circ) + \cos(47^\circ) = \cos(\theta)?$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor del ángulo agudo θ que satisface la ecuación,

$$\cos(73°) + \cos(47°) = \cos(\theta)?$$

Explique.

Problem. What is the value of the acute angle θ that satisfies the equation,

$$\cos(73°) + \cos(47°) = \cos(\theta)?$$

Explain.

Solución.

Recuerde la fórmula,

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \cos(73°) + \cos(47°) &= 2\cos\left(\frac{120°}{2}\right)\cos\left(\frac{26°}{2}\right) \\ &= 2\cos(60°)\cos(13°) \\ &= 2(1/2)\cos(13°) \\ &= \cos(13°) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\theta = 13°$.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor de la suma?

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right).$$

Explique.

Problem. What is the value of the sum?

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right).$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor de la suma?

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right).$$

Explique.

Problem. What is the value of the sum?

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right).$$

Explain.

Solución.

Recuerde que la función $\cos(x)$ tiene periodo 2π. Además, por la simetría del círculo unitario,

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) = 0.$$

Ahora, por el algoritmo de división, $2019 = 12 \cdot 168 + 3$. Así que,

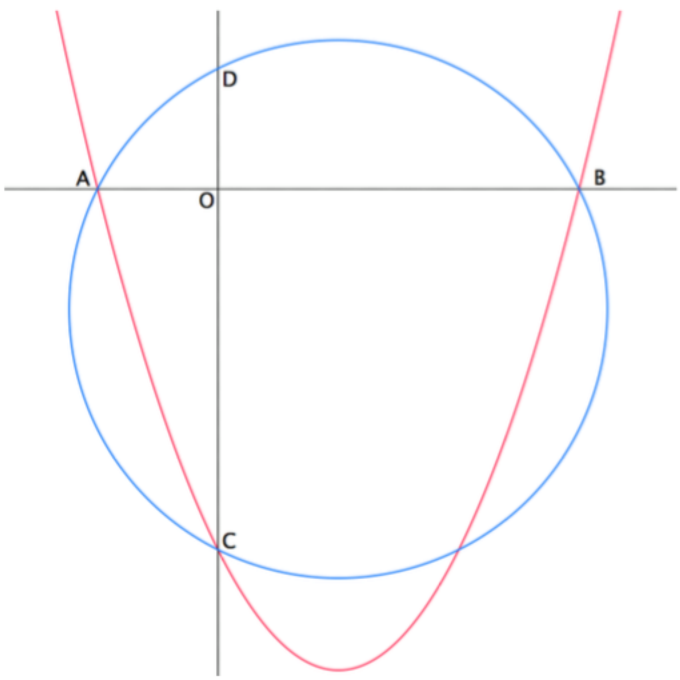
$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) &= 168 \cdot 0 + \cos\left(\frac{2017\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2018\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(336\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(336\pi + \frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(336\pi + \frac{3\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La cuadrática $y = x^2 - 6x - 16$ tiene una raíz negativa, una raíz positiva y un intercepto negativo en el eje-y, denotados, en la figura, por A, B, C respectivamente. Sea $\odot ABC$ el círculo a través de A, B, C. Encuentre el centro y el radio de $\odot ABC$ y las coordenadas del punto D. Explique.

Problem. The quadratic $y = x^2 - 6x - 16$ has a negative root, a positive root and a negative y-intercept, denoted in the figure, by A, B, C respectively. Let $\odot ABC$ be the circle through A, B, C. Find the center and radius of $\odot ABC$ and the coordinates of point D. Explain.



Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La cuadrática $y = x^2 - 6x - 16$ tiene una raíz negativa, una raíz positiva y un intercepto negativo en el eje-y, denotados, en la figura, por A, B, C respectivamente. Sea $\odot ABC$ el círculo a través de A, B, C. Encuentre el centro y el radio de $\odot ABC$ y las coordenadas del punto D. Explique.

Solución.

Es claro que $A = (-2, 0)$, $B = (8, 0)$ y $C = (0, -16)$. Sean (h, k) el centro y r el radio del círculo $\odot ABC$. La ecuación del círculo está dada por $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Como A, B, C están en el círculo,

$$
\begin{aligned}
(-2-h)^2 + (0-k)^2 &= r^2 \qquad (1)\\
(8-h)^2 + (0-k)^2 &= r^2 \qquad (2)\\
(0-h)^2 + (-16-k)^2 &= r^2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Simplificando un poco las euaciones (1),(2) y (3), obtenemos,

$$
\begin{aligned}
h^2 + 4h + 4 + k^2 &= r^2 \qquad (4)\\
h^2 - 16h + 64 + k^2 &= r^2 \qquad (5)\\
h^2 + k^2 + 32k + 256 &= r^2 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Restándole (5) a (4) obtenemos $20h - 60 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h = 3$.
Restándole (6) a (5) obtenemos

$$-16h - 32k - 192 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -32k = 192 + 48 = 240 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{240}{32} = -\frac{15}{2}.$$

Sustituyendo $h = 3$ y $k = -\frac{15}{2}$ en (2), obtenemos $r^2 = 5^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{325}{4}$. La ecuación de $\odot ABC$ es

$$(x-3)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{325}{4}.$$

Haciendo $x = 0$ en esta ecuación se obtiene

$$y = -\frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4} - 9} = -\frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4}} = -\frac{15}{2} \pm \frac{17}{2}.$$

Los interceptos del círculo son $C = (0, -16)$ y $D = (0, 1)$.

En fin, $\boxed{(h,k) = \left(3, -\frac{15}{2}\right) \qquad r = \frac{\sqrt{325}}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{2} \qquad D = (0,1).}$

Mesa #		Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre todos los números reales positivos x que satisfacen:

$$x^{\log_3(2)} = \sqrt{x} + 1.$$

Explique.

Problem. Find all positive real numbers x that satisfy:

$$x^{\log_3(2)} = \sqrt{x} + 1.$$

Explain.

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre todos los números reales positivos x que satisfacen:

$$x^{\log_3(2)} = \sqrt{x} + 1.$$

Explique.

Problem. Find all positive real numbers x that satisfy:

$$x^{\log_3(2)} = \sqrt{x} + 1.$$

Explain.

Solución.

Dado que la base del logaritmo es 3, haciendo $x = 3^{2u}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
x^{\log_3(2)} &= \sqrt{x} + 1 \\
\left(3^{2u}\right)^{\log_3(2)} &= \sqrt{3^{2u}} + 1 \\
(3)^{\log_3\left(2^{2u}\right)} &= 3^u + 1 \\
2^{2u} &= 3^u + 1 \\
4^u &= 3^u + 1 \\
1 &= \left(\frac{3}{4}\right)^u + \left(\frac{1}{4}\right)^u
\end{aligned}$$

Note que la función $g(u) = \left(\frac{3}{4}\right)^u + \left(\frac{1}{4}\right)^u$ es una función estrictamente decreciente ($\left(\frac{3}{4}\right)^u$ y $\left(\frac{1}{4}\right)^u$ lo son). Si $g(u) = 1$ para algún valor u, ese valor es único. Es claro que $g(1) = 1$. Así que, $u = 1$ es la única solución de la última ecuación y por ende $x = 3^{2\cdot 1} = 9$ es la única[a] solución de la ecuación original.

[a] La función 3^{2u} es una biyección de los reales a los reales positivos

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2019 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Evalúe
$$\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3).$$
Explique.

Problem. Evaluate
$$\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3).$$
Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2019	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Evalúe
$$\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3).$$
Explique.

Problem. Evaluate
$$\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3).$$
Explain.

Solución.

Sean $A = \tan^{-1}(1)$, $B = \tan^{-1}(2)$ y $C = \tan^{-1}(3)$. Note que $A = \frac{\pi}{4}$, ya que $\tan(A) = 1$ y $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$. Además, como $A = \frac{\pi}{4}$ y $f(x) = \tan^{-1}(x)$ es una función creciente,
$$-\frac{\pi}{2} < 0 < B < C < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{4} < A + B + C < \frac{5\pi}{4}.$$
Entonces,
$$\begin{aligned}
\tan(A+B+C) &= \frac{\tan(A) + \tan(B+C)}{1 - \tan(A)\tan(B+C)} \\
&\overset{(A=\frac{\pi}{4})}{=} \frac{1 + \tan(B+C)}{1 - \tan(B+C)}
\end{aligned}$$
Pero,
$$\begin{aligned}
\tan(B+C) &= \frac{\tan(B) + \tan(C)}{1 - \tan(B)\tan(C)} \\
&= \frac{2+3}{1 - 2 \cdot 3} \\
&= -\frac{5}{5} = -1
\end{aligned}$$
Así que,
$$\tan(A+B+C) = \frac{1 + \tan(B+C)}{1 - \tan(B+C)} = \frac{0}{2} = 0.$$
$$A + B + C \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \Longrightarrow A + B + C = \pi$$
En fin,
$$\boxed{\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \pi.}$$