Colegio Espíritu Santo
2018

2 de noviembre de 2018

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Determine todos los números reales x que satisfacen

$$\log_{2x}\left(48\sqrt[3]{3}\right) = \log_{3x}\left(162\sqrt[3]{2}\right).$$

Explique.

Problem. Determine all real numbers x that satisfy

$$\log_{2x}\left(48\sqrt[3]{3}\right) = \log_{3x}\left(162\sqrt[3]{2}\right).$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2018	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Determine todos los números reales x que satisfacen

$$\log_{2x}\left(48\sqrt[3]{3}\right) = \log_{3x}\left(162\sqrt[3]{2}\right).$$

Explique.

Solución.

Primeramente, las bases de los logaritmos son positivas y distintas de 1, así que $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ y $x \neq \frac{1}{3}$. Sean $A = \log(2)$ y $B = \log(3)$. Entonces,

$$\log(48) = \log\left(2^4 \cdot 3\right) = 4A + B \quad \text{y} \quad \log(162) = \log\left(2 \cdot 3^4\right) = A + 4B.$$

Utilizando la fórmula de cambio de base, obtenemos

$$\frac{\log\left(48\sqrt[3]{3}\right)}{\log(2x)} = \frac{\log\left(162\sqrt[3]{2}\right)}{\log(3x)}$$

Esta última ecuación es equivalente a

$$\frac{4A + B + \frac{1}{3}B}{A + \log(x)} = \frac{A + 4B + \frac{1}{3}A}{B + \log(x)}$$

Multiplicando ambos lados por 3 y luego sumando (en los numeradores)

$$\begin{aligned}
\frac{12A + 4B}{A + \log(x)} &= \frac{4A + 12B}{B + \log(x)} \\
[B + \log(x)]\,[12A + 4B] &= [A + \log(x)]\,[4A + 12B] \\
\log(x)\,[12A + 4B - 4A - 12B] &= A\,[4A + 12B] - B\,[12A + 4B] \\
\log(x)\,[8A - 8B] &= 4\left(A^2 - B^2\right) \\
\log(x) &= \frac{4\left(A^2 - B^2\right)}{8\,(A - B)} = \frac{A + B}{2} \\
\log(x) &= \frac{1}{2}\,(\log(2) + \log(3)) = \frac{1}{2}\,(\log(6)) = \log\left(\sqrt{6}\right)
\end{aligned}$$

Como la función $f(x) = \log(x)$ es inyectiva $\boxed{x = \sqrt{6}.}$

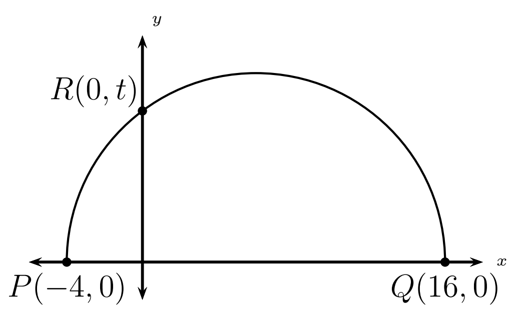
Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el diagrama, el segmento de recta con extremos en $P(-4,0)$ y $Q(16,0)$ es el diámetro de un semicírculo. Si $R(0,t)$ está en el círculo con $t>0$. Encuentre t. Explique.

Problem. In the diagram, the line segment with endpoints $P(-4,0)$ and $Q(16,0)$ is the diameter of a semicircle. If $R(0,t)$ is on the circle with $t>0$. Encuentre t. Explain.



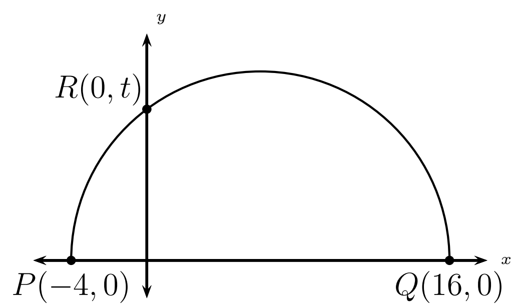
Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el diagrama, el segmento de recta con extremos en $P(-4,0)$ y $Q(16,0)$ es el diámetro de un semicírculo. Si $R(0,t)$ está en el círculo con $t>0$. Encuentre t. Explique.

Problem. In the diagram, the line segment with endpoints $P(-4,0)$ and $Q(16,0)$ is the diameter of a semicircle. If $R(0,t)$ is on the circle with $t>0$. Encuentre t. Explain.

Solución.



Sea M el punto medio entre $P(-4,0)$ y $Q(16,0)$. Entonces,

$$M=\left(\frac{-4+16}{2},\frac{0+0}{2}\right)=\left(\frac{12}{2},\frac{0}{2}\right)=(6,0).$$

Como $\overline{PQ}$ es el diámetro del semicírculo, el centro del círculo es $C(h,k)=M=(6,0)$ y el radio es $r=10$. Por lo tanto, la ecuación del círculo es

$$(x-6)^2+y^2=10^2.$$

Sustituyendo el punto $R(0,t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}(0-6)^2+t^2 &= 100\\ t^2 &= 100-36=64\\ t &= \pm 8\end{aligned}$$

Debido a la restricción en t, concluimos que $\boxed{t=8.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Determine los pares (x, y) de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} & = & 8 \\ \log(x) + \log(y) & = & 2 \end{cases} .$$

Explique.

Problem. Determine all pairs (x, y) of real numbers that satisfy the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} & = & 8 \\ \log(x) + \log(y) & = & 2 \end{cases} .$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Determine los pares (x, y) de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 8 \\ \log(x) + \log(y) &= 2 \end{cases}.$$

Explique.

Problem. Determine all pairs (x, y) of real numbers that satisfy the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 8 \\ \log(x) + \log(y) &= 2 \end{cases}.$$

Explain.

Solución.
De la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \log(x) + \log(y) &= 2 \\ \log(xy) &= 2 \\ 10^2 &= xy \end{aligned}$$

Cuadrando la primera ecuación,

$$64 = 8^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Como $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} = \sqrt{100} = 10$ (aquí queremos solamente las raíces principales),

$$x + y = 64 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = 64 - 20 = 44.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación $xy = 100$, obtenemos la cuadrática

$$\begin{aligned} xy &= 100 \\ x(44 - x) &= 100 \\ 0 &= x^2 - 44x + 100 \end{aligned}$$

Los posibles valores de x son $x = 22 \pm 8\sqrt{6}$. Las y correspondientes son $y = 44 - x = 22 \mp 8\sqrt{6}$.

En fin, las soluciones son

$$(x, y) = (22 + 8\sqrt{6}, 22 - 8\sqrt{6}) \quad \text{o} \quad (x, y) = (22 - 8\sqrt{6}, 22 + 8\sqrt{6}).$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Determine todos los números reales x que satisfacen

$$0 < \frac{x^2 - 11}{x + 1} < 7.$$

Explique.

Problem. Determine all real numbers x that satisfy

$$0 < \frac{x^2 - 11}{x + 1} < 7.$$

Explain.

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Determine todos los números reales x que satisfacen

$$0 < \frac{x^2 - 11}{x + 1} < 7.$$

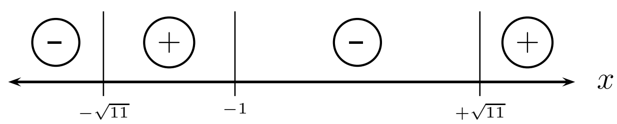
Explique.

Solución.

La solución de $\dfrac{x^2 - 11}{x + 1} > 0$ se obtiene haciendo un análisis de los signos del numerador y el denominador. Esta técnica utiliza el teorema del valor intermedio. Los signos de

$$\frac{x^2 - 11}{x + 1} = \frac{(x - \sqrt{11})(x + \sqrt{11})}{x + 1} > 0,$$

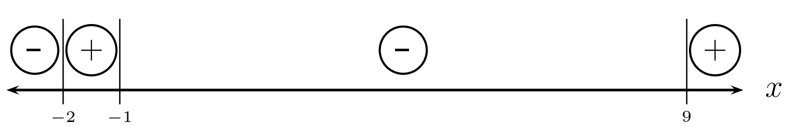
se resumen en el siguiente diagrama



La solución de esta primera desigualdad, en notación de intervalo, es $S_1 = \left(-\sqrt{11}, -1\right) \cup \left(+\sqrt{11}, +\infty\right)$. La solución de $\dfrac{x^2 - 11}{x + 1} < 7$ se obtiene de forma similar al caso anterior. Los signos de

$$\frac{x^2 - 11}{x + 1} - 7 = \frac{x^2 - 11 - 7x - 7}{x + 1} = \frac{(x - 9)(x + 2)}{x + 1} < 0,$$

se resumen en el siguiente diagrama



La solución de esta segunda desigualdad, en notación de intervalo, es $S_2 = (-\infty, -2) \cup (-1, +9)$. La solución de la desigualdad original, que es una conjunción, es

$$S = S_1 \cap S_2 = \left(-\sqrt{11}, -2\right) \cup \left(+\sqrt{11}, +9\right).$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La progresión geométrica $g_1, g_2, \ldots, g_n$, satisface

$$\begin{aligned} g_1 g_n &= 3 \\ g_1 g_2 g_3 \cdots g_n &= 59049 \end{aligned}$$

Determine el valor de n. Explique.

Problem. The geometric sequence $g_1, g_2, \ldots, g_n$, satisfies

$$\begin{aligned} g_1 g_n &= 3 \\ g_1 g_2 g_3 \cdots g_n &= 59049 \end{aligned}$$

Determine the value of n. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2018	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La progresión geométrica $g_1, g_2, \ldots, g_n$, satisface

$$\begin{aligned} g_1 g_n &= 3 \\ g_1 g_2 g_3 \cdots g_n &= 59049 \end{aligned}$$

Determine el valor de n. Explique.

Solución.

En una progresión geométrica si $g_1 = a$, entonces $g_k = ar^{k-1}$ para todo $k = 1, 2, \ldots$.

$$\begin{aligned} g_1 g_n = 3 &\implies (a)(ar^{n-1}) = 3 \\ &\implies a^2 r^{n-1} = 3 \\ &\implies \left(a^2 r^{n-1}\right)^n = 3^n \\ &\implies a^{2n} r^{(n-1)n} = 3^n \end{aligned}$$

De otra parte

$$\begin{aligned} g_1 g_2 g_3 \cdots g_n = 59040 &\implies (a)(ar^1)(ar^2)\cdots(ar^{n-1}) = 59049 \\ &\implies (a^n r^{1+2+\cdots+(n-1)}) = 59049 = 81 \cdot 729 = 81 \cdot 81 \cdot 9 = 3^{10} \\ &\implies a^n r^{\frac{(n-1)n}{2}} = 3^{10} \\ &\implies \left(a^n r^{\frac{(n-1)n}{2}}\right)^2 = \left(3^{10}\right)^2 \\ &\implies a^{2n} r^{(n-1)n} = 3^{20} \end{aligned}$$

Como $\quad a^{2n} r^{(n-1)n} = a^{2n} r^{(n-1)n} \quad \implies \quad 3^n = 3^{20} \quad \implies \quad \boxed{n = 20.}$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018

Tiempo : 5 mins.

Problema. Dado que

$$\frac{(x-2018)(y-2019)}{(x-2018)^2+(y-2019)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Encuentre el valor de $x+y$. Explique.

Problem. Given that

$$\frac{(x-2018)(y-2019)}{(x-2018)^2+(y-2019)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Find the value of $x+y$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que

$$\frac{(x-2018)(y-2019)}{(x-2018)^2+(y-2019)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Encuentre el valor de $x+y$. Explique.

Problem. Given that

$$\frac{(x-2018)(y-2019)}{(x-2018)^2+(y-2019)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Find the value of $x+y$. Explain.

Solución.

Sean $A = x - 2018$, $B = y - 2019$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{A^2+B^2} &= -\frac{1}{2} \\
2AB &= -A^2 - B^2 \\
A^2 + B^2 + 2AB &= 0 \\
(A+B)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
(x-2018) + (y-2019) &= 0 \\
x + y - 4037 &= 0 \\
x + y &= 4037
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Para cuántos enteros k con $0 < k < 18$ es

$$\frac{5\sin(10k^\circ) - 2}{\sin^2(10k^\circ)} \geq 2 \ ?$$

Explique.

Problem. For how many integers k with $0 < k < 18$ is

$$\frac{5\sin(10k^\circ) - 2}{\sin^2(10k^\circ)} \geq 2 \ ?$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2018	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Para cuántos enteros k con $0 < k < 18$ es

$$\frac{5\sin(10k^\circ) - 2}{\sin^2(10k^\circ)} \geq 2 \text{ ?}$$

Explique.

Solución.

Sea $\theta = 10k^\circ$. Entonces las desigualdades ahora son $0^\circ < \theta < 180^\circ$ y $\dfrac{5\sin(\theta) - 2}{\sin^2(\theta)} \geq 2$. Si $0^\circ < \theta < 180^\circ$, entonces $\sin(\theta) \neq 0$. Multiplicando por $\sin^2(\theta) > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{5\sin(\theta) - 2}{\sin^2(\theta)} &\geq 2 \\ 5\sin(\theta) - 2 &\geq 2\sin^2(\theta) \\ 0 &\geq 2\sin^2(\theta) - 5\sin(\theta) + 2 \\ 0 &\geq (2\sin(\theta) - 1)(\sin(\theta) - 2) \end{aligned}$$

Como $\sin(\theta) \leq 1 \Longrightarrow \sin(\theta) - 2 \leq -1 < 0$ para todo θ. Así que el signo de la última expresión arriba está determinado por $2\sin(\theta) - 1$. La desigualdad será cierta si $2\sin(\theta) - 1 \geq 0$ y esto es cierto si y sólo si $\sin(\theta) \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la desigualdad original es cierta si y sólo si $\frac{1}{2} \leq \sin(\theta) \leq 1$. Recuerde que $\sin(30^\circ) = \sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$.

Como $0^\circ < \theta < 180^\circ$, la desigualdad original se cumple exactamente cuando $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$. Esto es,

$$30^\circ \leq 10k^\circ \leq 150^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \leq k \leq 15.$$

Los enteros k son $k = 3, 4, 5, \ldots, 13, 14, 15$ y hay exactamente $\boxed{\text{13 de ellos.}}$

Mesa #		Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto de

$$\frac{\sin(80^\circ) + \sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)}.$$

Explique.

Problem. Find the exact value of

$$\frac{\sin(80^\circ) + \sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)}.$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2018	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto de

$$\frac{\sin(80^\circ) + \sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)}.$$

Explique.

Problem. Find the exact value of

$$\frac{\sin(80^\circ) + \sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)}.$$

Explain.

Solución.

Recuerde las fórmulas

$$\begin{aligned} \sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \\ \sin(u) + \sin(v) &= 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

Utilizando la primera fórmula

$$\sin(110^\circ) = \sin(20^\circ + 90^\circ) = \sin(20^\circ)\cos(90^\circ) + \cos(20^\circ)\sin(90^\circ) = \cos(20^\circ).$$

Utilizando la segunda fórmula

$$\begin{aligned} \sin(80^\circ) + \sin(40^\circ) &= 2\sin\left(\frac{80^\circ + 40^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ - 40^\circ}{2}\right) \\ &= 2\sin(60^\circ)\cos(20^\circ) \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(20^\circ) \\ &= \sqrt{3}\cos(20^\circ) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

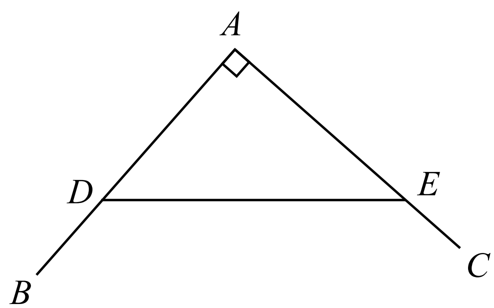
$$\frac{\sin(80^\circ) + \sin(40^\circ)}{\sin(110^\circ)} = \frac{\sqrt{3}\cos(20^\circ)}{\cos(20^\circ)} = \sqrt{3}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el diagrama, $\angle CAB = 90°$. El punto D está en AB y el punto E está en AC de modo que $AB = AC = DE, DB = 9$ y $EC = 8$. Determine la longitud de DE. Explique.

Problem. In the diagram, $\angle CAB = 90°$. Point D is on AB and point E is on AC so that $AB = AC = DE, DB = 9$ and $EC = 8$. Determine the length of DE. Explain.



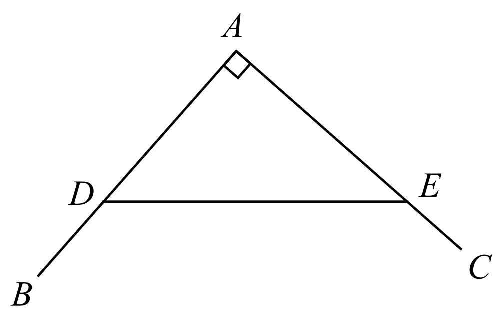
Mesa #		Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el diagrama, $\angle CAB = 90°$. El punto D está en AB y el punto E está en AC de modo que $AB = AC = DE, DB = 9$ y $EC = 8$. Determine la longitud de DE. Explique.

Problem. In the diagram, $\angle CAB = 90°$. Point D is on AB and point E is on AC so that $AB = AC = DE, DB = 9$ and $EC = 8$. Determine the length of DE. Explain.

Solución.



Suponga que $AB = AC = DE = x$. Como $DB = 9$, entonces $AD = x - 9$. Como $EC = 8$, entonces $AE = x - 8$. Por el teorema Pitagórico aplicado a $\triangle ADE$,

$$\begin{aligned} AD^2 + AE^2 &= DE^2 \\ (x-9)^2 + (x-8)^2 &= x^2 \\ x^2 - 18x + 81 + x^2 - 16x + 64 &= x^2 \\ x^2 - 34x + 145 &= 0 \\ (x-5)(x-29) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 5$ o $x = 29$. Como $x \geq 9$, ya que $AB \geq DB = 9$, la única posibilidad es que $x = 29$. Dado que $x = DE$, concluimos que $\boxed{DE = 29.}$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2018 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que,

$$\begin{aligned} \log(\sin(x)) + \log(\cos(x)) &= -1 \\ \log(\sin(x) + \cos(x)) &= \frac{1}{2}(\log(n) - 1) \end{aligned}$$

Determine el valor del entero n. Explique.

Problem. Given that,

$$\begin{aligned} \log(\sin(x)) + \log(\cos(x)) &= -1 \\ \log(\sin(x) + \cos(x)) &= \frac{1}{2}(\log(n) - 1) \end{aligned}$$

Determine the value of the integer n. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2018	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que,

$$\begin{aligned}\log(\sin(x)) + \log(\cos(x)) &= -1\\ \log(\sin(x) + \cos(x)) &= \frac{1}{2}(\log(n) - 1)\end{aligned}$$

Determine el valor del entero n. Explique.

Solución.

Primeramente,

$$\begin{aligned}\log(\sin(x)) + \log(\cos(x)) &= -1\\ \log(\sin(x)\cdot\cos(x)) &= -1\\ 10^{-1} &= \sin(x)\cdot\cos(x)\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\log(\sin(x) + \cos(x)) &= \frac{1}{2}(\log(n) - 1)\\ \log(\sin(x) + \cos(x)) &= \frac{1}{2}(\log(n) - \log(10))\\ \log(\sin(x) + \cos(x)) &= \log\left(\sqrt{\frac{n}{10}}\right)\\ \sin(x) + \cos(x) &= \sqrt{\frac{n}{10}}\\ (\sin(x) + \cos(x))^2 &= \left(\sqrt{\frac{n}{10}}\right)^2\\ \sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) &= \frac{n}{10}\end{aligned}$$

Utilizando la identidad fundamental $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ y el hecho de que

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{10},$$

obtenemos $1 + 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{n}{10}$, lo que implica que $\boxed{n = 12.}$