Colegio Espíritu Santo
2017

Iván Cardona Torres, Ph.D.

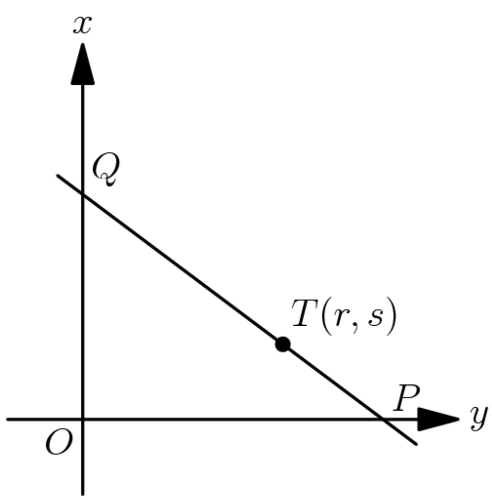
2 de marzo de 2018
Se pospuso debido a Irma y María

Mesa #		Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La recta $y = -\frac{3}{4}x + 9$ intercepta al eje-x en el punto P y al eje-y en el punto Q. Sea $T(r, s)$ un punto en el segmento de recta PQ. Si el área del triángulo $\triangle POQ$ es tres veces el área del triángulo $\triangle TOP$, ¿cuál es el valor de $r + s$? Explique.

Problem. The line $y = -\frac{3}{4}x + 9$ intercepts the x-axis at point P and the y-axis at point Q. Let $T(r, s)$ be a point on the line segment PQ. If the area of triangle $\triangle POQ$ is three times the area of triangle $\triangle TOP$, what is the value of $r + s$? Explain.



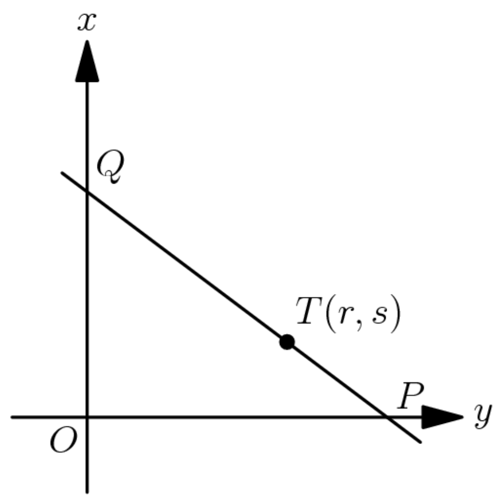
Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La recta $y = -\frac{3}{4}x + 9$ intercepta al eje-x en el punto P y al eje-y en el punto Q. Sea $T(r, s)$ un punto en el segmento de recta PQ. Si el área del triángulo $\triangle POQ$ es tres veces el área del triángulo $\triangle TOP$, ¿cuál es el valor de $r + s$? Explique.

Problem. The line $y = -\frac{3}{4}x + 9$ intercepts the x-axis at point P and the y-axis at point Q. Let $T(r, s)$ be a point on the line segment PQ. If the area of triangle $\triangle POQ$ is three times the area of triangle $\triangle TOP$, what is the value of $r + s$? Explain.

Solución.

En adelante, si Ω es una región en el plano, denotaremos por (Ω) el área de Ω.



Es fácil ver que $P = P(12, 0)$ y $Q = Q(0, 9)$. Así que,

$$\begin{aligned}(\triangle POQ) &= \frac{1}{2}(12)(9) = 54 \\ (\triangle TOP) &= \frac{1}{2}(12)(s) = 6s\end{aligned}$$

Por hipótesis,

$$(\triangle POQ) = 3 \cdot (\triangle TOP)\,.$$

Por lo tanto,

$$54 = 3 \cdot 6s = 18s.$$

Esto implica que $s = 3$ y $r = 8$.

En fin, $\boxed{r + s = 8 + 3 = 11.}$

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. María graficó los puntos $(2,4),(-2,4),(-2,-4),(2,-4),(4,2)$, y $(1,2)$ en un plano de coordenadas. Si ella selecciona al azar dos de los puntos y los conecta con una recta, ¿cuál es la probabilidad de que la recta que contiene los puntos pase por el origen? Explique.

Problem. Maria graphed points $(2,4),(-2,4),(-2,-4),(2,-4),(4,2)$, and $(1,2)$ in a coordinate plane. If she randomly selects two of the points and connects them with a line, what is the probability that the line containing the points will pass through the origin? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. María graficó los puntos $(2,4),(-2,4),(-2,-4),(2,-4),(4,2)$, y $(1,2)$ en un plano de coordenadas. Si ella selecciona al azar dos de los puntos y los conecta con una recta, ¿cuál es la probabilidad de que la recta que contiene los puntos pase por el origen? Explique.

Problem. Maria graphed points $(2,4),(-2,4),(-2,-4),(2,-4),(4,2)$, and $(1,2)$ in a coordinate plane. If she randomly selects two of the points and connects them with a line, what is the probability that the line containing the points will pass through the origin? Explain.

Solución.

Primeramente, dados dos puntos R, S, denote por $\ell(R,S)$ la recta a través de R y S.

Sean $P_1=(2,4), P_2=(-2,4), P_3=(-2,-4), P_4=(2,-4), P_5=(4,2)$, and $P_6=(1,2)$. Dados 6 puntos en el plano, hay $\binom{6}{2}=15$ maneras de escojer dos de ellos. En nuestro caso, tenemos

$$\begin{bmatrix}(P_1,P_2) & (P_1,P_3) & (P_1,P_4) & (P_1,P_5) & (P_1,P_6)\\ (P_2,P_3) & (P_2,P_4) & (P_2,P_5) & (P_2,P_6) & (P_3,P_4)\\ (P_3,P_5) & (P_3,P_6) & (P_4,P_5) & (P_4,P_6) & (P_5,P_6)\end{bmatrix}.$$

Estos 15 puntos determinan 15 rectas, a saber,

$$\begin{bmatrix}\ell(P_1,P_2) & \ell(P_1,P_3) & \ell(P_1,P_4) & \ell(P_1,P_5) & \ell(P_1,P_6)\\ \ell(P_2,P_3) & \ell(P_2,P_4) & \ell(P_2,P_5) & \ell(P_2,P_6) & \ell(P_3,P_4)\\ \ell(P_3,P_5) & \ell(P_3,P_6) & \ell(P_4,P_5) & \ell(P_4,P_6) & \ell(P_5,P_6)\end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones de esas rectas, respectivamente, son,

$$\begin{array}{lllll} y=4 & y=2x & x=2 & y=6-x & y=2x\\ \\ x=-2 & y=-2x & y=\frac{10}{3}-\frac{x}{3} & y=\frac{8}{3}-\frac{2x}{3} & y=-4\\ \\ y=x-2 & y=2x & y=3x-10 & y=8-6x & y=2\end{array}.$$

De estas, solamente 4 rectas pasan por el origen $\ell(P_1,P_3), \ell(P_1,P_6), \ell(P_3,P_6)$ y $\ell(P_2,P_4)$.

Por la tanto, la probabilidad de que el segmento de recta pase por el origen es

$$\frac{4}{15}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. El producto de tres enteros positivos pares consecutivos es veinte veces su suma. ¿Cuál es la suma de los tres enteros? Explique.

Problem. The product of three even consecutive positive integers is twenty times their sum. What is the sum of the three integers? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El producto de tres enteros positivos pares consecutivos es veinte veces su suma. ¿Cuál es la suma de los tres enteros? Explique.

Problem. The product of three even consecutive positive integers is twenty times their sum. What is the sum of the three integers? Explain.

Solución.

Sean $A-2$, A y $A+2$ los enteros. Entonces, por hipótesis

$$\begin{aligned} A(A-2)(A+2) &= 20 \cdot 3A = 60A \\ A^3 - 4A &= 60A \\ A^3 - 64A &= 0 \\ A(A^2 - 64) &= 0 \\ &\implies A^2 = 64 \quad \text{ó} \quad A = 0 \end{aligned}$$

Como los enteros son positivos,

$$A = 8, A-2 = 6, A+2 = 10.$$

La sume de los enteros es, $\boxed{6 + 8 + 10 = 24.}$

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea $P(x)$ un polinomio tal que al $P(x)$ ser dividido por $x-19$ el residuo es 99, y al $P(x)$ ser dividido por $x-99$ el residuo es 19. ¿Cuál es el residuo cuando $P(x)$ es dividido por $(x-19)(x-99)$? Explique.

Problem. Let $P(x)$ be a polynomial such that when $P(x)$ is divided by $x-19$ the remainder is 99, and when $P(x)$ is divided by $x-99$ the remainder is 19. What is the remainder when $P(x)$ is divided by $(x-19)(x-99)$? Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea $P(x)$ un polinomio tal que al $P(x)$ ser dividido por $x-19$ el residuo es 99, y al $P(x)$ ser dividido por $x-99$ el residuo es 19. ¿Cuál es el residuo cuando $P(x)$ es dividido por $(x-19)(x-99)$? Explique.

Problem. Let $P(x)$ be a polynomial such that when $P(x)$ is divided by $x-19$ the remainder is 99, and when $P(x)$ is divided by $x-99$ the remainder is 19. What is the remainder when $P(x)$ is divided by $(x-19)(x-99)$? Explain.

Solución.

Al dividir $P(x)$ por $D(x)=(x-19)(x-99)$ (que es cuadrático), el residuo es de la forma $cx+d$. Por el algoritmo de división,

$$P(x)=Q(x)(x-19)(x-99)+(cx+d).$$

Por el teorema del residuo, haciendo $x=99$ y $x=19$, obtenemos

$$\begin{aligned} 99c+d &= 19 \\ 19c+d &= 99 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, $c=-1$ y $d=118$.

Así que, el residuo cuando $P(x)$ es dividido por $(x-19)(x-99)$ es $\boxed{-x+118.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. En un triángulo $\triangle ABC$,

$$\begin{aligned} 3\sin(A) + 4\cos(B) &= 6 \\ 4\sin(B) + 3\cos(A) &= 1 \end{aligned}$$

Encuentre la medida de $\angle C$. Explique.

Problem. In a triangle $\triangle ABC$,

$$\begin{aligned} 3\sin(A) + 4\cos(B) &= 6 \\ 4\sin(B) + 3\cos(A) &= 1 \end{aligned}$$

Find the measure of $\angle C$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En un triángulo $\triangle ABC$,

$$\begin{aligned} 3\sin(A) + 4\cos(B) &= 6 \\ 4\sin(B) + 3\cos(A) &= 1 \end{aligned}$$

Encuentre la medida de $\angle C$. Explique.

Solución.

Cuadrando ambas ecuaciones,

$$\begin{aligned} 9\sin^2(A) + 16\cos^2(B) + 24\sin(A)\cos(B) &= 36 \\ 16\sin^2(B) + 9\cos^2(A) + 24\cos(A)\sin(B) &= 1 \end{aligned}$$

Sumando esta últimas dos ecuaciones y utilizando la identidad $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$,

$$\begin{aligned} 25 + 24\left(\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)\right) &= 37 \\ 25 + 24\sin(A+B) &= 37 \\ \sin(A+B) &= \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así que,

$$\frac{1}{2} = \sin(A+B) = \sin(180° - C) = \sin(C).$$

Esto implica que, $\angle C = 30°$ ó $150°$.

Si $\angle C = 150°$, entonces $A + B = 30° \implies A, B < 30° \implies \sin(A) < \frac{1}{2}, \quad \cos(B) < 1.$ Sustituyendo en la primera ecuación dada,

$$3\sin(A) + 4\cos(B) < 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4(1) = \frac{11}{2} = 5.5.$$

Esto es imposible, pues contradice la ecuación primera.

En fin, $\boxed{\angle C = 30°.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface la condición de que para todo $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los primeros $n-1$ términos. Si $a_1 = 23$ y $a_9 = 2018$, encuentre a_2. Explique.

Problem. The sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfies the condition that for all $n \geq 3$, a_n is the arithmetic mean of the first $n-1$ terms. If $a_1 = 23$ and $a_9 = 2018$, find a_2. Explain.

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface la condición de que para todo $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los primeros $n-1$ términos. Si $a_1 = 23$ y $a_9 = 2018$, encuentre a_2. Explique.

Problem. The sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfies the condition that for all $n \geq 3$, a_n is the arithmetic mean of the first $n-1$ terms. If $a_1 = 23$ and $a_9 = 2018$, find a_2. Explain.

Solución.

Sea $m = \frac{a_1+a_2}{2} \Longrightarrow a_1 = m - x \quad a_2 = m + x \quad$ para algún x. Entonces,

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_1+a_2}{2} = m \\
a_4 &= \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{(m-x)+(m+x)+m}{3} = \frac{3m}{3} = m \\
a_5 &= \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{(m-x)+(m+x)+2m}{4} = \frac{4m}{4} = m \\
&\ldots \\
a_n &= \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}}{n-1} = \frac{(m-x)+(m+x)+(n-3)m}{4} = \frac{(n-1)m}{n-1} = m
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_9 = m$ y esto implica que $m = 2018$. Así que,

$$23 = a_1 = m - x = 2018 - x.$$

$$\Longrightarrow \quad x = 2018 - 23 = 1995$$

$$\boxed{\Longrightarrow \quad a_2 = m + x = 2018 + 1995 = 4013.}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Las gráficas de

$$\begin{aligned} y &= -|x-a|+b \\ y &= |x-c|+d \end{aligned}$$

se intersecan solamente en los puntos $(2,5)$ y $(8,3)$. Encuentre $a+c$. Explique.

Problem. The graphs of

$$\begin{aligned} y &= -|x-a|+b \\ y &= |x-c|+d \end{aligned}$$

intersect only at points $(2,5)$ and $(8,3)$. Find $a+c$. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Las gráficas de

$$\begin{aligned} y &= -|x-a|+b \\ y &= |x-c|+d \end{aligned}$$

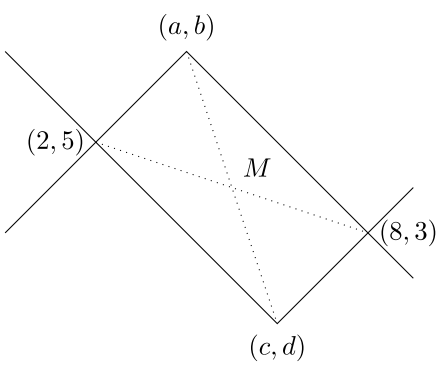
se intersecan solamente en los puntos $(2,5)$ y $(8,3)$. Encuentre $a+c$. Explique.

Problem. The graphs of

$$\begin{aligned} y &= -|x-a|+b \\ y &= |x-c|+d \end{aligned}$$

intersect only at points $(2,5)$ and $(8,3)$. Find $a+c$. Explain.

Solución.



Cada una de las gráficas consiste de dos medias-rectas ortogonales de pendientes ± 1. En la primera gráfica ambas medias-rectas apuntan hacia abajo y en la segunda gráfica ambas medias-rectas apuntan hacia arriba. Las coordenadas del punto más alto de la primera gráfica son (a,b) y las coordenadas del punto más bajo de la segunda gráfica son (c,d). Tomando en consideración que las medias-rectas son ortogonales y las pendientes son ± 1 la región acotada por las gráficas es un rectángulo. Sea M el punto medio de las diagonales del rectángulo. Entonces,

$$M = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (5,4).$$

Entre otras cosas, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{2} &= 5 \\ a+c &= 10 \end{aligned}$$

(**Nota**. Los pares de puntos $(a,b),(c,d)$ no necesariamente son únicos.)

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean $x, y > 0$ tales que,

$$\begin{aligned} \log_y(x) + \log_x(y) &= \frac{10}{3} \\ xy &= 144 \end{aligned}$$

Encuentre $x + y$. Explique.

Problem. Let $x, y > 0$ be such that,

$$\begin{aligned} \log_y(x) + \log_x(y) &= \frac{10}{3} \\ xy &= 144 \end{aligned}$$

Find $x + y$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean $x, y > 0$ tales que,

$$\begin{aligned} \log_y(x) + \log_x(y) &= \frac{10}{3} \\ xy &= 144 \end{aligned}$$

Encuentre $x + y$. Explique.

Problem. Let $x, y > 0$ be such that,

$$\begin{aligned} \log_y(x) + \log_x(y) &= \frac{10}{3} \\ xy &= 144 \end{aligned}$$

Find $x + y$. Explain.

Solución.

Utilizando la fórmula de cambio de base

$$\frac{\log(x)}{\log(y)} + \frac{\log(y)}{\log(x)} = 3\frac{1}{3}.$$

Esta última ecuación tiene la forma $u + \frac{1}{u}$, donde $u = \frac{\log(x)}{\log(y)}$, y por inspección vemos que $u = 3$ ó $\frac{1}{3}$ (Otra forma, resuelva la cuadrática $3u^2 - 10u + 3 = 0$). Así que, $\log(x) = 3\log(y)$ (o viceversa, no importa por la simetría del problema). Como la función $\log(z)$ es inyectiva, $x = y^3$. Sustituyendo en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} y^4 &= 144 \\ y &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Como $x = y^3 \implies x = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 24\sqrt{3}$

En fin, $\boxed{x + y = 26\sqrt{3}.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2017	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dos ángulos de un triángulo miden $120°$ y $45°$, y el lado más largo mide 90. Encuentre el valor exacto de la longitud del lado más corto del triángulo. Explique.

Problem. Two angles of a triangle are $120°$ and $45°$, and the longest side measures 90. Find the exact value of the length of the shortest side of the triangle. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dos ángulos de un triángulo miden 120° y 45°, y el lado más largo mide 90. Encuentre el valor exacto de la longitud del lado más corto del triángulo. Explique.

Problem. Two angles of a triangle are 120° and 45°, and the longest side measures 90. Find the exact value of the length of the shortest side of the triangle. Explain.

Solución.

El ángulo que falta mide $180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$. Por la ley de senos,

$$\frac{\sin(120^\circ)}{90} = \frac{\sin(15^\circ)}{c}$$

ó

$$\begin{aligned} \sin(120^\circ) \cdot c &= 90 \cdot \sin(15^\circ) \\ c &= \frac{90 \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(120^\circ)} \end{aligned}$$

Utilizando, ahora la fórmula de resta,

$$\begin{aligned} \sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) &= \sin(45^\circ)\cos(30^\circ) - \cos(45^\circ)\sin(30^\circ) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

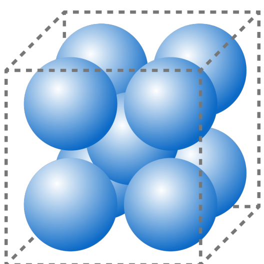
$$\begin{aligned} c &= \frac{90 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= 45\sqrt{2} - 15\sqrt{6} \end{aligned}$$

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Empacamos nueve esferas congruentes adentro de un cubo de lado 20 de tal manera que una de las esferas tiene centro en el centro del cubo y cada una de las otras es tangente a la esfera central y a tres caras del cubo. ¿Cuál es el radio de cada esfera? Explique.

Problem. Nine congruent spheres are packed inside a cube of side 20 in such a way that one of them has its center at the center of the cube and each of the others is tangent to the center sphere and to three faces of the cube. What is the radius of each sphere? Explain.



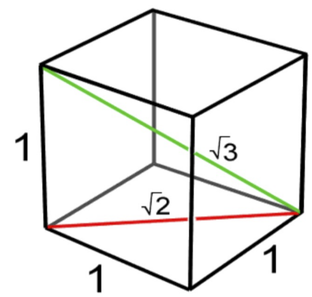
Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2017 **Tiempo : 5 mins.**

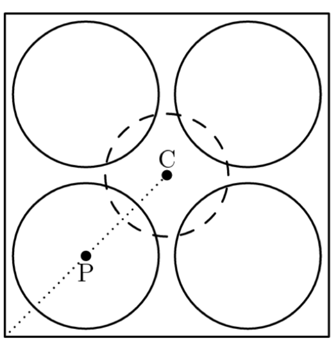
Problema. Empacamos nueve esferas congruentes adentro de un cubo de lado 20 de tal manera que una de las esferas tiene centro en el centro del cubo y cada una de las otras es tangente a la esfera central y a tres caras del cubo. ¿Cuál es el radio de cada esfera? Explique.

Solución.

Primeramente, note que la diagonal d_s de un cubo de lado s, mide $s\sqrt{3}$.



Sean r el radio común de las esferas, C el centro del cubo y P el centro de cualquiera de las esferas de arriba, digamos la esfera S_P. Note que $PC = 2r$. Considere la diagonal d_{20} del cubo (que tiene lado 20) que pasa através de los puntos C y P. Esta diagonal mide $20\sqrt{3}$ y pasa a través de tres esferas de diámetro $2r$.



Sea x la distancia entre el vértice, común a las tres caras del cubo que son tangentes a la esfera S_P, y la superficie de S_P. Entonces tenemos que,

$$d_{20} = 6r + 2x \tag{1}$$

$$20\sqrt{3} = 6r + 2x \tag{2}$$

Para encontrar x, note que como S_P es tangente a tres caras del cubo, P también es el vértice de un cubo pequeño de radio r (con tres caras sobre las caras del cubo grande). Si d_r es la diagonal de este cubo pequeño, entonces

$$d_r = r + x \tag{3}$$

$$r\sqrt{3} = r + x \tag{4}$$

De aquí que $x = r\sqrt{3} - r$, sustituyendo en la ecuación (2), obtenemos

$$6r + 2\left(r\sqrt{3} - r\right) = 20\sqrt{3}$$

$$4r + 2r\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

$$r = \frac{20\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} - 30$$