Colegio Espíritu Santo 2016

Iván Cardona Torres, Ph.D.

4 de noviembre de 2016

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere la sucesión

$$4, 12, 32, 80, \ldots, (n+1)2^n, \ldots$$

Para cada n, sea $S(n)$ la suma de los primeros n términos de la sucesión. Encuentre el valor exacto de $\frac{S(2016)}{2016}$. Explique.

Problem. Consider the sequence

$$4, 12, 32, 80, \ldots, (n+1)2^n, \ldots$$

For each n, let $S(n)$ the sum of the first n terms of the sequence. Find the exact value of $\frac{S(2016)}{2016}$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere la sucesión

$$4, 12, 32, 80, \ldots, (n+1)2^n, \ldots$$

Para cada n, sea $S(n)$ la suma de los primeros n términos de la sucesión. Encuentre el valor exacto de $\dfrac{S(2016)}{2016}$. Explique.

Solución.

Note que,

$$\begin{aligned}
\frac{S(1)}{1} &= \frac{4}{1} = 2^2 \\
\frac{S(2)}{2} &= \frac{S(1)+12}{2} = \frac{4+12}{2} = \frac{16}{2} = 2^3 \\
\frac{S(3)}{3} &= \frac{S(2)+32}{3} = \frac{16+32}{3} = \frac{48}{3} = 2^4 \\
\frac{S(4)}{4} &= \frac{S(3)+80}{3} = \frac{48+80}{4} = \frac{128}{4} = 2^5
\end{aligned}$$

De hecho, suponga que para k entero positivo $\dfrac{S(k)}{k} = 2^{k+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{S(k+1)}{k+1} &= \frac{S(k)+(k+2)2^{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{k2^{k+1}+(k+2)2^{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{(2k+2)2^{k+1}}{k+1} = \frac{(k+1)2^{k+2}}{k+1} = 2^{k+2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{S(n)}{n} = 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Así que, $\dfrac{S(2016)}{2016} = 2^{2017}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Demuestre que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $2^{3n} + 3^{2n}$ no es primo. Explique.

Problem. Show that there are infinitely many positive integers n such that $2^{3n} + 3^{2n}$ is not prime. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Demuestre que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $2^{3n} + 3^{2n}$ no es primo. Explique.

Problem. Show that there are infinitely many positive integers n such that $2^{3n} + 3^{2n}$ is not prime. Explain.

Solución.

Mostraremos que si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces $2^{3n} + 3^{2n} \geq 17$ y a la misma vez es un múltiplo de 17.

Primero, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{3n} + 3^{2n} = \left(2^3\right)^n + \left(3^2\right)^n = 8^n + 9^n \geq 8 + 9 = 17.$$

Segundo, si $n = 2k - 1$ con $k \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
2^{3n} + 3^{2n} &= 8^n + 9^n \\
&= 8^{2k-1} + 9^{2k-1} \\
&= \underbrace{(8+9)}_{17}\underbrace{\left(8^{2k-2} - 8^{2k-3} \cdot 9^1 + 8^{2k-4} \cdot 9^2 - \cdots - 8^1 \cdot 9^{2k-3} + 9^{2k-2}\right)}_{Q} \\
&= 17Q
\end{aligned}$$

Otra Forma (Si conoce el lenguaje de congruencias).

$$\begin{aligned}
2^{3n} + 3^{2n} = 8^n + 9^n &\equiv 8^n + (-8)^n \pmod{17} \\
&\equiv 8^{2k-1} + (-8)^{2k-1} \pmod{17} \\
&\equiv 8^{2k-1} - 8^{2k-1} \pmod{17} \\
&\equiv 0 \pmod{17}
\end{aligned}$$

En fin, para n ($\neq 1$) impar $2^{3n} + 3^{2n}$ es un múltiplo de 17 (mayor que 17) y por ende no es primo.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean a, b, c números reales tales que

$$\frac{\log_b(a)}{\log_c(a)} = \frac{19}{99} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = c^k.$$

Encuentre el valor de k. Explique.

Problem. Let a, b, c be real numbers such that

$$\frac{\log_b(a)}{\log_c(a)} = \frac{19}{99} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = c^k.$$

Find the value of k. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean a, b, c números reales tales que

$$\frac{\log_b(a)}{\log_c(a)} = \frac{19}{99} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = c^k.$$

Encuentre el valor de k. Explique.

Problem. Let a, b, c be real numbers such that

$$\frac{\log_b(a)}{\log_c(a)} = \frac{19}{99} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = c^k.$$

Find the value of k. Explain.

Solución.

Utilizando la fórmula de cambio de base (todo en base 10),

$$\frac{19}{99} = \frac{\log_b(a)}{\log_c(a)} = \frac{\left(\frac{\log(a)}{\log(b)}\right)}{\left(\frac{\log(a)}{\log(c)}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\log(b)}\right)}{\left(\frac{1}{\log(c)}\right)} = \frac{\log(c)}{\log(b)}.$$

De otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= c^k \\ b &= c^{k+1} \\ \log(b) &= (k+1)\log(c) \\ \frac{\log(b)}{\log(c)} - 1 &= k \end{aligned}$$

En fin,

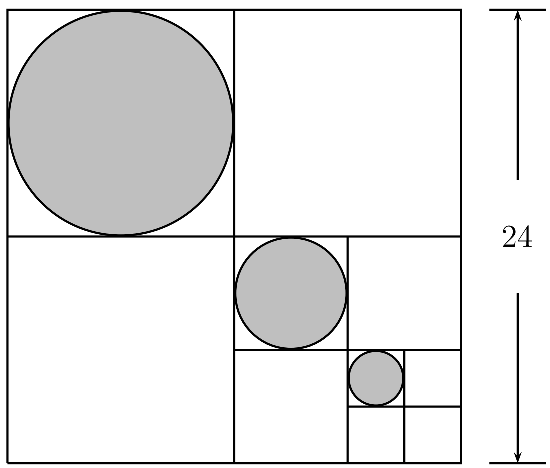
$$k = \frac{\log(b)}{\log(c)} - 1 = \frac{99}{19} - 1 = \frac{80}{19}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En la figura, el cuadrado de lado 24 es subdividido y tres círculos son inscritos como se ilustra. Encuentre la suma de las áreas de los tres círculos. Explique.

Problem. In the figure, the square of side 24 is subdivided and three circles are inscribed as shown. Find the sum of the area of the three circles. Explain.



Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

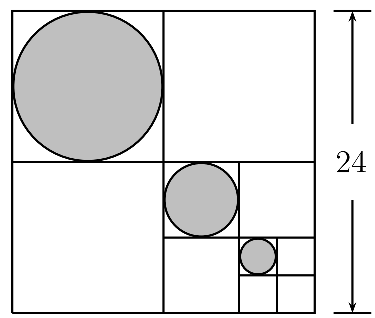
Problema. En la figura, el cuadrado de lado 24 es subdividido y tres círculos son inscritos como se ilustra. Encuentre la suma de las áreas de los tres círculos. Explique.

Problem. In the figure, the square of side 24 is subdivided and three circles are inscribed as shown. Find the sum of the area of the three circles. Explain.

Solución.

El área de un círculo cuyo diámetro es d está dada por

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2.$$



De la figura, obtenemos que los diámetros de los tres círculos en orden descendente son $d_1 = 12$, $d_2 = 6$ y $d_3 = 3$. La suma de las áreas de los tres círculos es:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\pi}{4} \cdot 12^2 + \frac{\pi}{4} \cdot 6^2 + \frac{\pi}{4} \cdot 3^2.$$

Factorizando $\frac{\pi}{4}$, obtenemos:

$$S = \frac{\pi}{4}\left[12^2 + 6^2 + 3^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[144 + 36 + 9\right] = \frac{189\pi}{4}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor exacto de

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)?$$

Explique.

Problem. What is the exact value of

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)?$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor exacto de

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)?$$

Explique.

Solución.

Por la fórmula de doble ángulo tenemos, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. Esto implica que,

$$\cos(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}.$$

Sea $A = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)}_{\text{Factor Distinto}}$. Dado que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ se sigue que,

$$\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \qquad \text{y} \qquad A = -B.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
A &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\\
&= \left[\frac{\sin(2\pi/7)}{2\sin(\pi/7)}\right]\cdot\left[\frac{\sin(4\pi/7)}{2\sin(2\pi/7)}\right]\cdot\left[\frac{\sin(8\pi/7)}{2\sin(4\pi/7)}\right]\\
&= \frac{\sin(8\pi/7)}{8\sin(\pi/7)}\\
&= \frac{-\sin(\pi/7)}{8\sin(\pi/7)}\\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Así que, $\boxed{B = \frac{1}{8}}$

Mesa #		Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2016		Tiempo : 5 mins.

Problema. Considere el conjunto $S = \{24, 27, 55, 64, x\}$. Dado que la media de los números en S es un número primo y que la mediana de S es un múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de todos los posibles valores enteros positivos de x? Explique.

Problem. Consider the set $S = \{24, 27, 55, 64, x\}$. Given that the mean of all numbers in S is a prime number and that the median of S is a multiple of 3. What is the sum of all positive integral values of x? Explain.

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere el conjunto $S = \{24, 27, 55, 64, x\}$. Dado que la media de los números en S es un número primo y que la mediana de S es un múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de todos los posibles valores enteros positivos de x? Explique.

Problem. Consider the set $S = \{24, 27, 55, 64, x\}$. Given that the mean of all numbers in S is a prime number and that the median of S is a multiple of 3. What is the sum of all positive integral values of x? Explain.

Solución.

Ordenando los elementos de S de menor a mayor y sin saber el valor de x, las posibilidades son:

$$S = \{24, 27, 55, 64, x\} \quad S = \{24, 27, 55, x, 64\} \quad S = \{24, 27, x, 55, 64\}$$
$$S = \{24, x, 27, 55, 64\} \quad S = \{x, 24, 27, 55, 64\}.$$

Las restricciones en la mediana nos dejan las siguientes posibilidades:

$$S = \{24, 27, x, 55, 64\} \quad S = \{24, x, 27, 55, 64\} \quad S = \{x, 24, 27, 55, 64\}.$$

La mediana es x o 27. Esto es, 3 divide a x y $x < 55$, o $x \leq 27$. En cualquier caso la suma de los cinco (5) números es,

$$24 + 27 + 55 + 64 + x = 170 + x < 170 + 55 = 225.$$

Así que la media μ satisface $34 = \frac{170}{5} < \mu < \frac{225}{5} = 45$. Como μ es un número primo, $\mu = 37, 41, \text{o } 43$. Ahora bien,

$$\mu = \frac{170 + x}{5} \implies x = 5\mu - 170.$$

Los posibles valores para x, son respectivamente $x = 15, 35, \text{o } 45$. Pero, $x = 35$ es mayor que 27 pero no es un múltiplo de 3, así que se descarta. La contestación es

$$15 + 45 = 60.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 14x^3 + 88x^2 - 290x + 375$. Dado que $3 + 4i$ es una raíz compleja de $P(x)$ y que las demás raíces son números complejos o números enteros primos, factorice $P(x)$ completamente. Explique.

Problem. Consider the polynomial $P(x) = x^4 - 14x^3 + 88x^2 - 290x + 375$. Given that $3 + 4i$ is a complex root of $P(x)$ and that the other roots are either complex numbers or prime integers, factor $P(x)$ completely. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 14x^3 + 88x^2 - 290x + 375$. Dado que $3+4i$ es una raíz compleja de $P(x)$ y que las demás raíces son números complejos o números enteros primos, factorice $P(x)$ completamente. Explique.

Problem. Consider the polynomial $P(x) = x^4 - 14x^3 + 88x^2 - 290x + 375$. Given that $3 + 4i$ is a complex root of $P(x)$ and that the other roots are either complex numbers or prime integers, factor $P(x)$ completely. Explain.

Solución.

Por $P(x)$ tener coeficientes enteros, las raíces complejas de $P(x)$ vienen en pares conjugados. Esto es, si $a + bi$ es una raíz de $P(x)$, entonces $a - bi$ también es una raíz de $P(x)$. En nuestro caso esto implica que, utilizando el teorema del factor,

$$(x - (3 + 4i))(x - (3 - 4i)) = x^2 - 6x + 25$$

es un factor de $P(x)$. Dividiendo $P(x)$ por $x^2 - 6x + 25$, obtenemos residuo 0 y cociente $x^2 - 8x + 15$. En fin que $P(x)$ factoriza,

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 14x^3 + 88x^2 - 290x + 375 \\ &= (x^2 - 6x + 25)(x^2 - 8x + 15) \\ &= (x - (3 + 4i))(x - (3 - 4i))(x - 3)(x - 5) \end{aligned}$$

Otra forma. Por el teorema de las raíces racionales, las posibles raíces racionales positivas de $P(x)$ están en la lista

$$\{1, 3, 5, 15, 25, 75, 125, 375\}.$$

En esta lista solo hay dos enteros primos 3 y 5. Ambos son raíces de $P(x)$. Así que $(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$ es un factor de $P(x)$, etc.

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016

Tiempo : 5 mins.

Problema. Para cada $k \geq 0$, sea $T_k = 0 + 1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$. Encuentre el valor de la suma

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k T_k.$$

Explique.

Problem. For each $k \geq 0$, let $T_k = 0 + 1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$. Find the value of the sum

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k T_k.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Para cada $k \geq 0$, sea $T_k = 0 + 1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$. Encuentre el valor de la suma

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k T_k.$$

Explique.

Problem. For each $k \geq 0$, let $T_k = 0 + 1 + 2 + \cdots + k + (k+1)$. Find the value of the sum

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k T_k.$$

Explain.

Solución.

Note que

$$T_{2m} - T_{2m-1} = 2m + 1.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k T_k &= T_0 - T_1 + T_2 - \cdots + T_{2016} \\
&= T_0 + (T_2 - T_1) + (T_4 - T_3) + \cdots + (T_{2016} - T_{2015}) \\
&= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2017 \\
&= \sum_{k=0}^{1008} (2k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{1008} (2k) + \sum_{k=0}^{1008} (1) \\
&= 2 \sum_{k=0}^{1008} (k) + 1009 \\
&= 2 \left[\frac{1008 \cdot 1009}{2} \right] + 1009 \\
&= 1008 \cdot 1009 + 1009 = (1008 + 1)1009 \\
&= 1009^2
\end{aligned}$$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Defina una función $I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como sigue:

$$I(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ si } n \text{ es par} \\ n+1 & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} .$$

Para toda x, escribimos $I^2(x) = I(I(x))$, $I^3(x) = I(I^2(x))$, ...

(i). Encuentre un entero positivo k tal que $I^k(49) = 1$.

(ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, defina $\Gamma_k = \{n \in \mathbb{N} : I^k(n) = 1\}$ y $\gamma_k =$ la cantidad de elementos en Γ_k. Demuestre que $\gamma_{100} = \gamma_{99} + \gamma_{98}$.

Problem. Define a function $I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ as follows:

$$I(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ if } n \text{ is even} \\ n+1 & , \text{ if } n \text{ is odd} \end{cases} .$$

For all x, we write $I^2(x) = I(I(x))$, $I^3(x) = I(I^2(x))$, ...

(i). Find a positive integer k such that $I^k(49) = 1$.

(ii). For all $k \in \mathbb{N}$, define $\Gamma_k = \{n \in \mathbb{N} : I^k(n) = 1\}$ and $\gamma_k =$ the number of elements in Γ_k. Show that $\gamma_{100} = \gamma_{99} + \gamma_{98}$.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Defina una función $I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como sigue:

$$I(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ si } n \text{ es par} \\ n+1 & , \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} .$$

(i). Encuentre un entero positivo k tal que $I^k(49) = 1$.

(ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, defina $\Gamma_k = \{n \in \mathbb{N} : I^k(n) = 1\}$ y $\gamma_k =$ la cantidad de elementos en Γ_k. Demuestre que $\gamma_{100} = \gamma_{99} + \gamma_{98}$.

Solución. (i) Note que $I^{10}(49) = 1$. Así que, $k = 10$. Vea diagrama.

$$49 \xrightarrow{I} 50 \xrightarrow{I} 25 \xrightarrow{I} 26 \xrightarrow{I} 13 \xrightarrow{I} 14 \xrightarrow{I} 7 \xrightarrow{I} 8 \xrightarrow{I} 4 \xrightarrow{I} 2 \xrightarrow{I} 1.$$

(ii) De la definición, a manera de ejemplo, podemos ver que $\Gamma_3 = \{8, 3\}$, $\Gamma_4 = \{16, 6, 7\}$, $\Gamma_5 = \{32, 12, 14, 15, 5\}$, $\gamma_3 = 2$, $\gamma_4 = 3$ y $\gamma_5 = 5$. Note que $\gamma_5 = \gamma_4 + \gamma_3$. De hecho es posible demostrar que $\forall k \geq 3$, $\gamma_{k+2} = \gamma_{k+1} + \gamma_k$.

Defina $\Gamma^0_{100} = \{n \in \Gamma_{100} : n \text{ es par}\}$ y $\Gamma^1_{100} = \{n \in \Gamma_{100} : n \text{ es impar}\}$. Es claro que,

$$\Gamma_{100} = \Gamma^0_{100} \cup \Gamma^1_{100} \quad \text{(unión disjunta).}$$

Para demostrar que $\gamma_{100} = \gamma_{99} + \gamma_{98}$, es suficiente encontrar dos biyecciones:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^0_{100} & \longleftrightarrow & \Gamma_{99} \\ \Gamma^1_{100} & \longleftrightarrow & \Gamma_{98} \end{array}$$

La función $f : \Gamma^0_{100} \longrightarrow \Gamma_{99}$ definida por la regla $f(y) = \frac{y}{2}$ es una biyección, pues $F(x) = 2x$ es la función inversa. Hay que cotejar algunos detalles de dominio y codominio. A saber, note que

$$y \in \Gamma^0_{100} \Longrightarrow I^{100}(y) = 1 \text{ y } y \text{ es par} \Longrightarrow 1 = I^{99}(I(y)) = I^{99}(f(y)) \Longrightarrow f(y) \in \Gamma_{99}$$

También,

$$z \in \Gamma_{99} \Longrightarrow I^{99}(z) = 1 \text{ y } F(z) = 2z \Longrightarrow 1 = I^{99}(z) = I^{99}(I(2z)) = I^{100}(2z) = I^{100}(F(z)) \Longrightarrow F(z) \in \Gamma^0_{100}$$

Igualmente, la función $g : \Gamma^1_{100} \longrightarrow \Gamma_{98}$ definida por la regla $g(y) = \frac{y+1}{2}$ es una biyección, pues $G(x) = 2x - 1$ es la función inversa. Es cuestión de cotejar dos cosas

$$y \in \Gamma^1_{100} \Longrightarrow g(y) \in \Gamma_{98} \qquad \text{y} \qquad z \in \Gamma_{98} \Longrightarrow G(z) \in \Gamma^1_{100}$$

En fin, dadas las dos biyecciones, tenemos $\boxed{\gamma_{100} = \gamma_{99} + \gamma_{98}.}$

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el año 1614 el escocés John Napier, estudió una función muy parecida a los logaritmos. Napier definió una función, que hoy en día se conoce como logaritmo napieriano, como sigue:

$$\text{NapLog}(N) = L \quad \text{si y solo si} \quad N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L .$$

Exprese $\text{NapLog}(10^9)$ en términos del logaritmo común $\log_{10}$.
Explique.

Problem. In the year 1614 the scottish John Napier, studied a function very similar to logarithms. Napier defined a function, that is known today as napierian logarithm, as follows:

$$\text{NapLog}(N) = L \quad \text{if and only if} \quad N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L .$$

Express $\text{NapLog}(10^9)$ in terms of the common logarithm $\log_{10}$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En el año 1614 el escocés John Napier, estudió una función muy parecida a los logaritmos. Napier definió una función, que hoy en día se conoce como logaritmo napieriano, como sigue:

$$\text{NapLog}(N) = L \quad \text{si y solo si} \quad N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L.$$

Exprese $\text{NapLog}(10^9)$ en términos del logaritmo común $\log_{10}$. Explique.

Problem. In the year 1614 the scottish John Napier, studied a function very similar to logarithms. Napier defined a function, that is known today as napierian logarithm, as follows:

$$\text{NapLog}(N) = L \quad \text{if and only if} \quad N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L.$$

Express $\text{NapLog}(10^9)$ in terms of the common logarithm $\log_{10}$. Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L &= 10^9 \\
\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L &= 10^2 \\
L \cdot \log_{10}(1 - 10^{-7}) &= 2 \\
L &= \frac{2}{\log_{10}(1 - 10^{-7})}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{NapLog}(10^9) = \frac{2}{\log_{10}(1 - 10^{-7})}.$$