Colegio Espíritu Santo
2015

Iván Cardona Torres, Ph.D.

6 de noviembre de 2015

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Defina una operación binaria "∇" sobre $\mathbb{R}$ como sigue:

$$x \nabla y = x \cdot (x - y).$$

(i). Evalúe $(5 \nabla 1) + (4 \nabla 1)$.

(ii). Encuentre un $y \in \mathbb{R}$ de manera que $\sqrt{3} \nabla y = 1$. Explique.

Problem. Define a binary operation "∇" on $\mathbb{R}$ as follows:

$$x \nabla y = x \cdot (x - y).$$

(i). Evaluate $(5 \nabla 1) + (4 \nabla 1)$.

(ii). Find $y \in \mathbb{R}$ such that $\sqrt{3} \nabla y = 1$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Defina una operación binaria "∇" sobre $\mathbb{R}$ como sigue:

$$x \,\nabla\, y = x \cdot (x - y).$$

(i). Evalúe $(5 \,\nabla\, 1) + (4 \,\nabla\, 1)$.

(ii). Encuentre un $y \in \mathbb{R}$ de manera que $\sqrt{3} \,\nabla\, y = 1$. Explique.

Solución.

(i).

$$\begin{aligned} (5 \,\nabla\, 1) + (4 \,\nabla\, 1) &= 5(5-1) + 4(4-1) \\ &= 5(4) + 4(3) \\ &= 20 + 12 \\ &= 32 \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \,\nabla\, y &= 1 \\ \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3} - y\right) &= 1 \\ \sqrt{3} - y &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} &= y \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} &= y \end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Una prueba de música contenía 50 preguntas de selección múltiple. La puntuación de Sheldon se calculó:

- sumando 4 puntos por cada contestación correcta,
- restando 1 punto por cada contestación incorrecta, y
- sumando 0 puntos por cada pregunta sin contestar.

Sheldon contestó 45 de las 50 preguntas y su puntuación fue 135 puntos. ¿Cuántas preguntas contestó Sheldon incorrectamente? Explique.

Problem. A music test included 50 multiple choice questions. Sheldon's score was calculated by:

- adding 4 points for each correct answer,
- subtracting 1 point for each incorrect answer, and
- adding 0 points for each unanswered question.

Sheldon answered 45 of the 50 questions and his score was 135 points. How many questions Sheldon answered incorrectly? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Una prueba de música contenía 50 preguntas de selección múltiple. La puntuación de Sheldon se calculó:

- sumando 4 puntos por cada contestación correcta,
- restando 1 punto por cada contestación incorrecta, y
- sumando 0 puntos por cada pregunta sin contestar.

Sheldon contestó 45 de las 50 preguntas y su puntuación fue 135 puntos. ¿Cuántas preguntas contestó Sheldon incorrectamente? Explique.

Solución.

Sean C, I y N las contestaciones correctas, las contestaciones incorrectas y la preguntas sin contestar, respectivamente. Entonces,

Sheldon contestó 45 de las 50 preguntas $\Longrightarrow \quad C + I = 45 \quad \text{y} \quad N = 5.$

La puntuación fue 135 $\Longrightarrow \quad 4 \cdot C - 1 \cdot I + 0 \cdot U = 135$. De aquí, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C + I & = & 45 \\ 4C - I & = & 135 \end{array} \right.$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos que $5C = 180$ y por ende $C = \frac{180}{5} = 36$. Por lo tanto, $I = 45 - 36 = 9$. En fin, Sheldon contestó $\boxed{\text{9 preguntas incorrectamente.}}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean p, q y r enteros positivos tales que

$$p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{17}{3}.$$

Encuentre el valor de $p + q + r$. Explique.

Problem. Let p, q and r be positive integers such that

$$p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{17}{3}.$$

Find the value of $p + q + r$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean p, q y r enteros positivos tales que

$$p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{17}{3}.$$

Encuentre el valor de $p + q + r$. Explique.

Solución.

Como p, q y r son enteros positivos,

$$\begin{aligned} q + \frac{1}{r} > 1 \quad &\Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{q + \frac{1}{r}} < 1 \\ &\Longrightarrow \quad p < p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} < p + 1 \\ &\Longrightarrow \quad p < \frac{17}{3} = 5.666\ldots < p + 1 \\ &\Longrightarrow \quad p = 5 \end{aligned}$$

Como $p = 5$ y $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$, esto implica que $\frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{2}{3} \quad &\Longrightarrow \quad q + \frac{1}{r} = \frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow \quad q < q + \frac{1}{r} = 1.5 < q + 1 \\ &\Longrightarrow \quad q = 1 \end{aligned}$$

Como $q = 1$ y $q + \frac{1}{r} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, esto implica que $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $r = 2$.

Finalmente, $\boxed{p + q + r = 5 + 1 + 2 = 8.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea $F(x) = \dfrac{16^x}{16^x + 4}$. Evalúe la suma,

$$F\left[\frac{1}{2015}\right] + F\left[\frac{2}{2015}\right] + F\left[\frac{3}{2015}\right] + \cdots + F\left[\frac{2014}{2015}\right].$$

Explique.

Problem. Let $F(x) = \dfrac{16^x}{16^x + 4}$. Evaluate the sum,

$$F\left[\frac{1}{2015}\right] + F\left[\frac{2}{2015}\right] + F\left[\frac{3}{2015}\right] + \cdots + F\left[\frac{2014}{2015}\right].$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea $F(x) = \dfrac{16^x}{16^x + 4}$. Evalúe la suma,

$$F\left[\frac{1}{2015}\right] + F\left[\frac{2}{2015}\right] + F\left[\frac{3}{2015}\right] + \cdots + F\left[\frac{2014}{2015}\right].$$

Explique.

Solución.

Note que,

$$F(1-x) = \frac{16^{1-x}}{16^{1-x}+4} = \frac{16/16^x}{(16+4\cdot 16^x)/16^x} = \frac{16}{16+4\cdot 16^x} = \frac{4}{4+16^x}.$$

Así que,

$$F(x) + F(1-x) = \frac{16^x}{16^x+4} + \frac{4}{4+16^x} = \frac{16^x}{16^x+4} + \frac{4}{16^x+4} = 1.$$

Por lo tanto, si denotamos la suma por S,

$$\begin{aligned}
S &= F\left[\frac{1}{2015}\right] + F\left[\frac{2}{2015}\right] + F\left[\frac{3}{2015}\right] + \cdots + F\left[\frac{2014}{2015}\right] \\
&= \underbrace{\left\{F\left[\frac{1}{2015}\right] + F\left[\frac{2014}{2015}\right]\right\}}_{1} + \underbrace{\left\{F\left[\frac{2}{2015}\right] + F\left[\frac{2013}{2015}\right]\right\}}_{1} + \cdots + \underbrace{\left\{F\left[\frac{1007}{2015}\right] + F\left[\frac{1008}{2015}\right]\right\}}_{1} \\
&= 1007 \times 1 \\
&= 1007
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor mínimo de $\dfrac{9x^2 \operatorname{sen}^2(x) + 4}{x \operatorname{sen}(x)}$ para $0 < x < \pi$. Explique.

Problem. Find the minimum value of $\dfrac{9x^2 \sin^2(x) + 4}{x \sin(x)}$ for $0 < x < \pi$. Explain.

Mesa #		Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor mínimo de $\dfrac{9x^2\operatorname{sen}^2(x)+4}{x\operatorname{sen}(x)}$ para $0 < x < \pi$. Explique.

Problem. Find the minimum value of $\dfrac{9x^2\sin^2(x)+4}{x\sin(x)}$ for $0 < x < \pi$. Explain.

Solución.

Sea $y = x\operatorname{sen}(x)$. Entonces la expresión $\frac{9x^2\operatorname{sen}^2(x)+4}{x\operatorname{sen}(x)}$ se puede escribir $\frac{9y^2+4}{y} = 9y + \frac{4}{y}$. Para $0 < x < \pi$, ambos x y $\operatorname{sen}(x)$ son positivos, así que $y > 0$. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, obtenemos

$$9y + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{9y \cdot \frac{4}{y}} = 12$$

con igualdad $\iff 9y = \frac{4}{y} \iff 9y^2 = 4 \iff y = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, el valor mínimo es $\boxed{12.}$ Este valor se alcanza cuando $x\operatorname{sen}(x) = \frac{2}{3}$, ya que $x\operatorname{sen}(x)$ es continua y creciente en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ y su imagen es $0 \leq x\operatorname{sen}(x) \leq \frac{\pi}{2} = 1.57079\ldots$ Es cuestión de aplicar el teorema del valor intermedio.

Otra forma. Si completamos el cuadrado en $\frac{9y^2+4}{y}$,

$$\frac{9y^2+4}{y} = \frac{9y^2+4}{y} - \frac{12y}{y} + 12 = \frac{(3y-2)^2}{y} + 12.$$

Como $y > 0$, es claro que esta función tiene un mínimo (que es igual a 12) cuando $3y-2 = 0$.

Otra forma (Cálculo). La función $g(y) = 9y + \frac{4}{y}$ tiene primera derivada $g'(y) = 9 - \frac{4}{y^2}$ y segunda derivada $g''(y) = \frac{8}{y^3}$. El punto crítico es $y = \frac{2}{3}$ y la gráfica es cóncava hacia arriba, etc.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. En una fiesta de cumpleaños, la anfitriona reparte 100 chocolates colocándolos en 14 bolsas (cada bolsa tiene al menos un chocolate). Demuestre que hay al menos dos bolsas con la misma cantidad de chocolates. Explique.

Problem. At a birthday party, the hostess distributes 100 chocolates by putting them in 14 bags (each bag has at least one chocolate). Show that there are at least two bags with the same amount of chocolates. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. En una fiesta de cumpleaños, la anfitriona reparte 100 chocolates colocándolos en 14 bolsas (cada bolsa tiene al menos un chocolate). Demuestre que hay al menos dos bolsas con la misma cantidad de chocolates. Explique.

Problem. At a birthday party, the hostess distributes 100 chocolates by putting them in 14 bags (each bag has at least one chocolate). Show that there are at least two bags with the same amount of chocolates. Explain.

Solución.

Para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, 14$, sea C_i el número de chocolates colocados en la i-ésima bolsa. Sin perder generalidad, cambiándole la numeración a las bolsas de ser necesario, se puede asumir que

$$1 \leq C_1 \leq C_2 < \cdots \leq C_{14}.$$

Si todos los C_i's fueran distintos, entonces tendríamos que,

$$100 = \sum_{i=1}^{14} C_i \geq \sum_{i=1}^{14} i = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$$

Pero esto no puede ocurrir, así que al menos dos de los C_i's han de ser iguales.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que

$$\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = 3.$$

Encuentre el valor numérico de: $\operatorname{sen}(x)$. Explique.

Problem. Given that

$$\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = 3.$$

Encuentre el valor numérico de: $\sin(x)$. Explain.

$\boxed{\textbf{Mesa \#}\quad}$ **Valor : 10 ptos.**

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que

$$\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = 3.$$

Encuentre el valor numérico de: $\operatorname{sen}(x)$. Explique.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x) &= 3 \\
\frac{1}{\cos(x)} &= 3 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\
1 &= 3\cos(x) + \operatorname{sen}(x) \\
1 - \operatorname{sen}(x) &= 3\cos(x)
\end{aligned}$$

Cuadrando ambos lados (esto puede introducir raíces extrañas),

$$\begin{aligned}
1 - 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x) &= 9\cos^2(x) \\
1 - 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x) &= 9\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right) \\
10\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) - 8 &= 0 \\
5\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) - 4 &= 0 \\
(5\operatorname{sen}(x) + 4)(\operatorname{sen}(x) - 1) &= 0
\end{aligned}$$

Esto implica que $\operatorname{sen}(x) = -\frac{4}{5}$ o $\operatorname{sen}(x) = 1$. El caso $\operatorname{sen}(x) = 1$ se descarta pues esto implicaría que $\cos(x) = 0$ y esto no es solución de la ecuación original. El caso $\operatorname{sen}(x) = -\frac{4}{5}$ implicaría que $\cos(x) = \pm\frac{3}{5}$. El caso $\operatorname{sen}(x) = -\frac{4}{5}$ y $\cos(x) = +\frac{3}{5}$ sí satisface la ecuación original, así que podemos concluir que $\boxed{\operatorname{sen}(x) = -\frac{4}{5}.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean f, g dos funciones sobre $\mathbb{R}$ tales que, para todos los valores de x,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x + 5 \\ f(x) - g(x) &= 5x + 7 \end{aligned}$$

Determine el valor de $2f(2)g(2)$. Explique.

Problem. Let f, g be two functions on $\mathbb{R}$ such that, for all values of x,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x + 5 \\ f(x) - g(x) &= 5x + 7 \end{aligned}$$

Determine the value of $2f(2)g(2)$. Explain.

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean f, g dos funciones sobre $\mathbb{R}$ tales que, para todos los valores de x,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x + 5 \\ f(x) - g(x) &= 5x + 7 \end{aligned}$$

Determine el valor de $2f(2)g(2)$. Explique.

Problem. Let f, g be two functions on $\mathbb{R}$ such that, for all values of x,

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x + 5 \\ f(x) - g(x) &= 5x + 7 \end{aligned}$$

Determine the value of $2f(2)g(2)$. Explain.

Solución.

Si sustituimos $x = 2$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} f(2) + g(2) = 11 \\ f(2) - g(2) = 17 \end{cases}$$

Sumando la dos ecuaciones obtenemos $2f(2) = 28$. Sustituyendo $f(2) = 14$ en la primera ecuación obtenemos que $g(2) = -3$. En fin, $\boxed{2f(2)g(2) = 28 \cdot (-3) = -84.}$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, z números reales mayores que 1 y B un número real positivo tales que,

$$\log_x(B) = 24 \qquad \log_y(B) = 40 \qquad \log_{xyz}(B) = 12.$$

Encuentre $\log_z(B)$. Explique.

Problem. Let x, y, z be real numbers greater than 1 and B be a positive real number such that,

$$\log_x(B) = 24 \qquad \log_y(B) = 40 \qquad \log_{xyz}(B) = 12.$$

Find $\log_z(B)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y, z números reales mayores que 1 y B un número real positivo tales que,

$$\log_x(B) = 24 \qquad \log_y(B) = 40 \qquad \log_{xyz}(B) = 12.$$

Encuentre $\log_z(B)$. Explique.

Problem. Let x, y, z be real numbers greater than 1 and B be a positive real number such that,

$$\log_x(B) = 24 \qquad \log_y(B) = 40 \qquad \log_{xyz}(B) = 12.$$

Find $\log_z(B)$. Explain.

Solución.

Cambiando las ecuaciones logarítmicas a ecuaciones exponenciales, obtenemos,

$$x^{24} = B \qquad y^{40} = B \qquad (xyz)^{12} = B.$$

Escribiéndolo todo a la potencia de 120 (un múltiplo común) obtenemos,

$$x^{120} = B^5 \qquad y^{120} = B^3 \qquad (xyz)^{120} = B^{10}.$$

Así que,

$$B^{10} = (xyz)^{120} = x^{120}y^{120}z^{120} = B^5B^3z^{120}.$$

Cancelando,

$$B^2 = z^{120}.$$

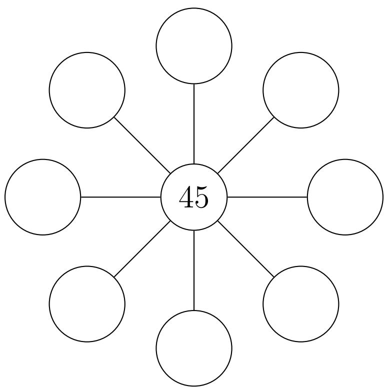
Tomando logaritmos con base z,

$$\begin{aligned} \log_z\left(B^2\right) &= \log_z\left(z^{120}\right) \\ 2\log_z(B) &= 120 \\ \log_z(B) &= 60 \end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Colegio Espíritu Santo, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que en la figura de abajo colocamos enteros positivos en los círculos que están vacíos de manera que el producto de cualesquiera tres enteros en línea recta es 3240. ¿Cuál es la suma máxima posible de los ocho números alrededor del 45? Explique.

Problem. Suppose that in the figure below we put positive integers in the empty circles in such a way that the product of any three integers in a straight line is 3240. What is the largest possible sum of the eight numbers surrounding 45? Explain.



Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

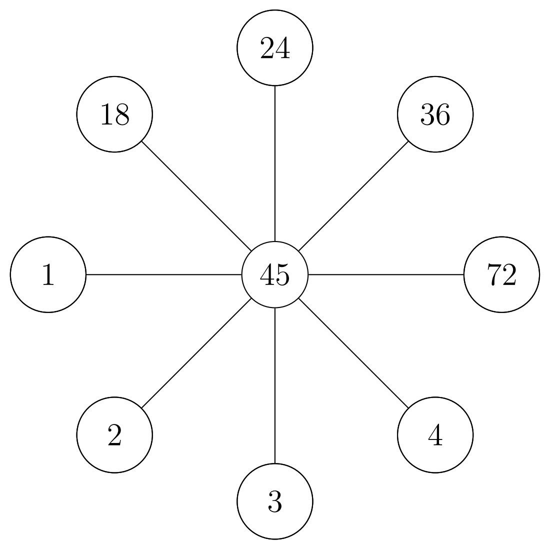
Colegio Espíritu Santo, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que en la figura de abajo colocamos enteros positivos en los círculos que están vacíos de manera que el producto de cualesquiera tres enteros en línea recta es 3240. ¿Cuál es la suma máxima posible de los ocho números alrededor del 45? Explique.

Problem. Suppose that in the figure below we put positive integers in the empty circles in such a way that the product of any three integers in a straight line is 3240. What is the largest possible sum of the eight numbers surrounding 45? Explain.

Solución.

Como el producto de los tres enteros en cada línea recta debe ser 3240 y debe incluir a 45 como factor, los otros dos enteros en cada recta deben tener producto $\frac{3240}{45} = 72 = 2^3 \cdot 3^2$.



El número 72 tiene 12 divisores que se pueden dividir en pares (x, y) con $x \cdot y = 72$. A saber,

$$(x,y) = \begin{cases} (1,72) & (4,18) \\ (2,36) & (6,12) \\ (3,24) & (8,9) \end{cases}$$

Para cada uno de estos pares (x, y) la suma $x + y$ está dada por,

$$x + y = \begin{cases} 73 & 22 \\ 38 & 18 \\ 27 & 17 \end{cases}$$

Para maximizar la suma de los ocho números alrededor del 45 es suficiente escoger los cuatro pares de mayor suma, los pares que suman $73, 38, 27$ y 22 respectivamente. La suma máxima posible es

$$73 + 38 + 27 + 22 = 160.$$

Vea la figura para un posible arreglo.