Competencia de matemáticas invitacional
Saint Francis School
Nivel superior

Elaborado por:

Prof. Edwin Flórez - UPRM
Dr. Rafael Aparicio - UPRRP
Dr. José De Jesús - UPRRP
Dr. Luis Fuentes - UPRRP

integrantes del Grupo STutorPR

Marzo 17 de 2017

1. (10 points) (5 min) Considere la función cuadrática $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(13,5)$ e intercepta al eje-x en los puntos $(20,0)$ y $(30,0)$. Halle $f(37)$.

   Consider the cuadratic function $f(x)$ *whose graph pass through the point* $(13,5)$ *and intersects the* x*-axis at the points* $(20,0)$ *and* $(30,0)$. *Find* $f(37)$.

   Solution: La coordenada x del vértice de la parábola es 25. Los valores 13 y 37 son simétricos con respecto a 25, por lo tanto $f(37) = f(13) = 5$.

2. (10 points) (5 min) En una reunión familiar asistieron 15 personas, al escribir sus edades de menor a mayor se dieron cuenta que las edades estaban en progresión aritmética. Si la persona más vieja en la reunión tiene 94 años y la persona que estaba de número 7 en la lista tiene 46 años, ¿cuál es la edad de la persona más joven en la reunión?

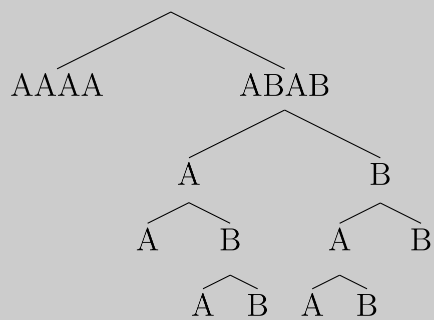
Fifteen people attended to a family reunion. When they wrote their ages from the youngest person to the oldest, they realized that the ages were related in arithmetic progression. If the oldest person in the meeting is 94 years old and the person who was number 7 on the list is 46 years old, what is the age of the youngest person in the meeting?

Solution: En una progresión aritmética $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, el termino n-ésimo está dado por $a_n = dn + b$ donde d es la diferencia común. La diferencia común entre los términos a_{n_1} y a_{n_2} está dada por $d = \dfrac{a_{n_2} - a_{n_1}}{n_2 - n_1}$. En este caso, tomando a_n como la edad en años de la persona que está en la posición n de la lista tenemos que $a_7 = 46$ y $a_{15} = 94$ por lo que la distancia común es $d = \dfrac{94 - 46}{15 - 7} = \dfrac{48}{8} = 6$. Así, $a_n = 6n + b$. Para encontrar b basta con saber que $94 = a_{15} = 6(15) + b$, de donde se obtiene que $b = 4$. Por lo tanto, $a_n = 6n + 4$. La persona más joven le corresponde la primera posición en la lista, es decir, $n = 1$ por lo que la edad de la persona más joven es $a_1 = 6(1) + 4 = 10$ años.

3. (10 points) (5 min) Los equipos A y B juegan la serie final de un torneo de baloncesto. El equipo que primero gane 4 juegos obtiene el campeonato. Si se sabe que el equipo que gane el primer juego, ganará también el tercero, y que el equipo que gane el segundo juego, también ganará el cuarto, encuentre el número de maneras diferentes en que se puede dar la serie final.

   Teams A and B are going to play the championship tournament. The first team that wins four games is declare to be the champion. If it is known that the team who wins the first game will also wins the third game, and that the team who wins the second game will also wins the fourth game, find the number of distinct possible development of the championship tournament.

   Solution: Haciendo el árbol de opciones donde el equipo A gana el primer juego:



   vemos que hay 7 opciones. Usando simetría para contar las posibilidades al cambiar A por B, tenemos un total de $2 \cdot 7 = 14$ posibles formas.

4. (10 points) (5 min) Ocho niños se comen 8 bizcochos en 8 minutos. ¿Cuántos niños son necesarios para comerse 2 bizcochos en 2 minutos?

   Eight children eat 8 cupcakes in 8 minutes. How many children are needed to eat 2 cupcakes in 2 minutes?

   Solution: Los 8 niños están comiendo a una razón de 1 bizcocho por minuto. Así, que los mismos ocho niños se comen 2 bizcochos en 2 minutos.

5. (10 points) (5 min) Si $x^2 + x - 3 = 0$, halle el valor de $x^4 - 7x^2 + 14$.

If $x^2 + x - 3 = 0$, *find the value of* $x^4 - 7x^2 + 14$.

Solution: Usando división larga tenemos que $x^4 - 7x^2 + 14 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 3) + 5$. Así, si $x^2 + x - 3 = 0$, entonces $x^4 - 7x^2 + 14 = 5$.

6. (10 points) (5 min) Si a y b son números enteros positivos, tal que $a \neq b$. Hallar las soluciones de la ecuación:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right) = 0$$

Let a and b be positive integer such that $a \neq b$. Find the solutions of the equation:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right) = 0$$

Solution: Como

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right) + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 = 0$$

entonces

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + 2\left(\frac{x+a}{x+b}\right)\left(\frac{x-a}{x-b}\right) + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b}\right)^2 = 0$$

$$\frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b} = 0$$

$$\frac{(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b)}{(x+b)(x-b)} = 0$$

Luego

$$(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b) = 0$$

$$2x^2 - 2ab = 0$$

$$x = \pm\sqrt{ab}$$

7. (10 points) (5 min) Para cada entero positivo n, se define

$$f(n) = \begin{cases} \log_9 n & \text{si } \log_9 n \text{ es racional,} \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{2017} f(n)$.

For each positive integer n, define

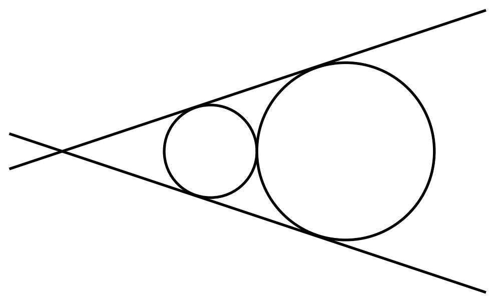
$$f(n) = \begin{cases} \log_9 n & \log_9 n \textit{ is rational,} \\ 0 & \textit{otherewise.} \end{cases}$$

Compute $\sum_{n=1}^{2017} f(n)$.

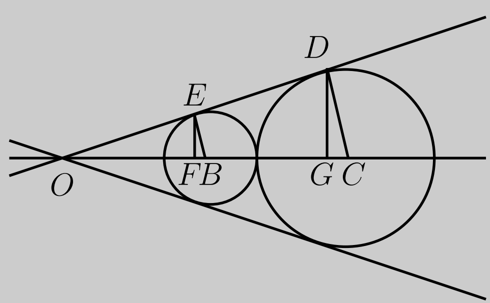
Solution: Haciendo cambio de base $\log_9 n = \frac{1}{2} \log_3 n$. Para que el $\log_3 n$ sea un número racional, n debe ser potencia de 3. Dentro de todas las potencias de tres, las primeras siete son las que dan un número menor que 2017. Luego, $\sum_{n=1}^{2017} f(n) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{2}$.

8. (10 points) (5 min) Un arquitecto está diseñando dos bases circulares para una construcción, como se muestra en la figura. Para continuar con su trabajo el arquitecto debe encontrar el radio del círculo mas grande. El sabe que el radio del círculo mas pequeño es 1 y que los dos círculos están dentro del calzo (cuña) formado por las ecuaciones $y = \pm\frac{x}{3}$. Ayude al arquitecto con este cálculo (encontrando el radio del círculo mas grande).

   An architect is designing two circular bases for a construction, as shown in the figure. In order to continue with the design the architect must find the radius of the largest circle. He knows that the radius of the smallest circle is 1 *and that the two circles are inside the wedge defined by the equations* $y = \pm\frac{x}{3}$. *Help the architect with this calculation* (*by finding the radius of the largest circle*).



Solution: Una forma de ayudarlo sería dibujando los radios BE y CD de ambos círculos a los puntos de tangencia y también las perpendiculares EF y DG a la línea horizontal como sigue:



De esta forma se puede observar que los triángulos OEF y OBE son semejantes. Luego $\frac{OF}{EF} = 3 = \frac{OE}{BE}$, donde $OE = 3$. Por tanto $OB = \sqrt{10}$. También los triángulos OBE y OCD son semejantes, luego $\frac{OC}{OB} = \frac{DC}{EB}$, o lo que es igual, $\frac{R+1+\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{R}{1}$, de ahí tenemos lo requerido por el arquitecto, $R = \frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}$.

9. (10 points) (5 min) Para una sucesión finita $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de números reales se define *la suma de Cèsaro de la sucesión* A mediante la fórmula

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$$

donde $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para $1 \leq k \leq n$.

Si la suma de Cèsaro de una sucesión de $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$, que tiene 99 términos, es 1000, encuentre la suma de Cèsaro para la sucesión $\langle 1, a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$ que tiene 100 términos.

The Cèsaro sum of a finite sequence of real numbers $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ *is defined by the formula*

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n},$$

where $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ *para* $1 \leq k \leq n$.

If the Cèsaro sum of a 99-term sequence $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$ *is* 1000, *find the Cèsaro sum of the* 100*-term sequence* $\langle 1, a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$.

Solution: La nueva sucesión de sumas parciales tendría la forma $S'_1 = 1$, $S'_2 = 1 + S_1$, en general $S'_{i+1} = 1 + S_i$. Luego la suma de Cèsaro para la nueva sucesión de 100 términos es

$$\begin{aligned}\frac{S'_1 + S'_2 + \cdots S'_{100}}{100} &= \frac{100 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{99}}{100}\\ &= 1 + \frac{99}{100}\left(\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{99}}{99}\right)\\ &= 1 + \frac{99}{100} \cdot 1000 = 991.\end{aligned}$$

10. (10 points) (5 min) Considere todos los enteros positivos de tres dígitos. ¿Cuántos de estos enteros tienen los tres dígitos diferentes y a su vez son números pares?

Consider all positive integers of three digits. How many of these integers are even and with all digits distincts?

Solution: Note que el cero no puede estar en el dígito de las centenas. Haremos dos cuentas, primero los números que terminan en cero. De estos hay $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$, donde en el producto:

- el 1 representa al último dígito que es fijo, que en este caso es cero,
- el 9, las posibilidades para el primer dígito, siendo todos menos el cero,
- y el 8, las posibilidades para el segundo dígito, siendo cualquier dígito menos los usados en el primer y el último dígito.

Y la otra cuenta se hace para los números que terminan en 2, 4, 6 u 8. De estos hay $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$ posibilidades. Esta vez en el producto:

- el número 4, de usar los dígitos dos o tres o seis o ocho,
- las 8 posibilidades en las centenas es por que ya fijamos las unidades y el cero no puede estar allí,
- y finalmente, el 8 de las decenas es por que nos quedan disponibles ocho dígitos, aquí sí podemos poner el cero.

Por lo tanto, las posibilidades totales son $72 + 256 = 328$.