Competencias de matemáticas
Saint Francis School

Elaborado por:

Prof. Edwin Flórez - UPRM
Dr. Rafael Aparicio - UPRRP
Dr. José De Jesús - UPRRP
Dr. Luis Fuentes - UPRRP

integrantes del Grupo STutorPR

Abril 23 de 2016

1. (10 points) (5 min) Tres muchachitos, Juan, Pepe y Raúl, quieren comprar un cierto libro que, según les dijeron, se está vendiendo en una librería de su vecindad. Cada uno de ellos va a sus respectivos padres y les pide dinero.

   Los tres muchachitos se reúnen en la entrada de la librería y se dan cuenta que cada uno de ellos tiene un numero entero de dólares, producto de la bondad de sus padres. Pero también se dan cuenta que ninguno de ellos tiene dinero suficiente para comprar el libro. En particular, Juan necesita \$4.00, Pepe necesita \$5.00 y Raúl necesita \$6.00. Ahora, el problema mayor esta en que, aun juntando todo el dinero que tienen los tres, no les es posible alcanzar e1 precio del libro.

   Determine cuanto dinero tiene cada uno de ellos y cual es el precio del libro.

   Three children, Juan, Pepe and Raúl, want to buy a book that is on sale at the nearest bookstore. Each one goes to his respective parents and asks for money.

   They meet at the entrance of the bookstore and find that each one has an integer number of dollars, product of the charity of their parents. They also noticed that none of them has enough money to buy the book. In particular, Juan needs \$4.00. Pepe needs \$5.00. and Raul needs \$6.00 more. Moreover, even if they combine the money own by the three, they will not have enough even to buy a single copy of the book.

   Determine how much money each one of them has and the price of the book.

   Solution: Sean,

$$
\begin{aligned}
x &:= \text{el dinero que tiene Juan.}\\
y &:= \text{el dinero que tiene Pepe.}\\
z &:= \text{el dinero que tiene Raúl.}\\
w &:= \text{el precio del libro.}\\
x+4 &:= \text{el precio del libro.}\\
y+5 &:= \text{el precio del libro.}\\
z+6 &:= \text{el precio del libro.}\\
x+y+z &:= \text{el dinero que tienen los tres.}
\end{aligned}
$$

   Así, $x+y+z+15 = 3w$ y $x+y+z < w$. Por lo tanto, $3w < w+15$ con lo que $w < \frac{15}{2}$. De la expresión "...cada uno de ellos tiene un numero entero de dólares, producto de la bondad de sus padres." Se concluye que x, y y z son números naturales, por lo tanto w también debe ser natural. Así, podemos ver que $w = 7$, $z = 1$, $y = 2$ y $x = 3$.

2. (10 points) (5 min) Dado
$$x^4 + 16,$$
expresarlo como el productos de dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales.

Given
$$x^4 + 16,$$
express it like the product of two quadratic polynomials with real coefficients.

Solution: Completando cuadrado obtenemos que $x^4 + 16 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2$. Ahora por diferencia de cuadrados obtenemos que:

$$x^4 + 16 = [(x^2 + 4) + 2\sqrt{2}x][(x^2 + 4) - 2\sqrt{2}x]$$
$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)$$

Solution: (Alternativa) Asumamos que $x^2 + 16 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, entonces $x^2 + 16 = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$.

Ahora, usando la igualdad de polinomio tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ ac + b + d &= 0 \\ ad + bc &= 0 \\ bd &= 16. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $a = -c$ y sustituyendo en la tercera ecuación obtenemos que $a(d - b) = 0$. Así, $a = 0$ o $b = d$. Si $a = 0$, entonces de la segunda ecuación $b = -d$ y sustituyendo en la última ecuación obtenemos que $b^2 = -16$ lo cual es imposible dado que b es un número real. Es decir, a no puede ser cero. Luego, $b = d$. Ahora sustituyendo nuevamente en la última ecuación obtenemos que $b^2 = 16$. Por lo tanto, $b = 4$ o $b = -4$.

Si $b = d = -4$, entonces sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $a^2 = -8$ lo cual es imposible dado que a es un número real. Es decir, b no puede ser -4. Por lo tanto, $b = d = 4$. Ahora sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos que $a^2 = 8$, así $a = 2\sqrt{2}$ o $a = -2\sqrt{2}$. Ahora, como $a = -c$, entonces $c = -2\sqrt{2}$ o $a = 2\sqrt{2}$ respectivamente. Así,

$$x^4 + 16 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)$$

3. (10 points) (5 min) Una compañía fabrica dos productos, X y Y. Cada uno de estos productos requiere cierto tiempo en la línea de ensamblado y otro tiempo más en el departamento de acabado. Cada artículo del tipo X necesita 5 horas de ensamblado y 2 horas de acabado; mientras que cada artículo del tipo Y requiere 3 horas en ensamblado y 4 de acabado. En cualquier semana, la empresa dispone de 105 horas en la línea de ensamblado y 70 horas en el departamento de acabado, la compañía utiliza todas las horas disponibles. La empresa puede vender todos los artículos que produce y obtener una utilidad de \$200 por cada artículo de X y \$160 por cada artículo de Y. Calcule la utilidad semanal de la compañía.

   A company manufactures two products, X and Y. Each of these products requires some time on the assembly line and additional time in the finishing department. Each item of type X requires 5 hours of assembly and 2 hours finishing; while each item type Y requires 3 hours of assembly and 4 hours finishing. In any given week, the company has 105 hours on the assembly line and 70 hours in the finishing department, the company always use all available hours in both stages. The company can sell all the items produced and make a profit of \$200 for each item of X and \$160 per article Y. Calculate the weekly profit of the company.

Solution: Sean,

$$\begin{aligned}
x &:= \text{el número de unidades producidas y vendidas del producto de tipo } X \text{ en una semana.}\\
y &:= \text{el número de unidades producidas y vendidas del producto de tipo } Y \text{ en una semana.}\\
U &:= \text{la utilidad de la compañía en una semana.}\\
5x &:= \text{es el tiempo de ensamblado de todos los artículos del tipo } X \text{ en una semana.}\\
2x &:= \text{es el tiempo de acabado de todos los artículos del tipo } X \text{ en una semana.}\\
3y &:= \text{es el tiempo de ensamblado de todos los artículos del tipo } Y \text{ en una semana.}\\
4x &:= \text{es el tiempo de acabado de todos los artículos del tipo } Y \text{ en una semana.}\\
5x+3y &:= \text{es el tiempo total de ensamblado en una semana.}\\
2x+4y &:= \text{es el tiempo total de acabado en una semana.}\\
200x &:= \text{es la utilidad semanal en dólares por los artículos del tipo } X.\\
160y &:= \text{es la utilidad semanal en dólares por los artículos del tipo } Y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 5x+3y &= 105 \\ 2x+4y &= 70 \end{aligned} \quad \text{y} \quad U = 200x + 160y.$$

Solucionando el sistema

$$\begin{cases} 5x+3y = 105 \\ 2x+4y = 70, \end{cases}$$

se obtiene que $x = 15$ y $y = 10$. Así, la utilidad semanal es

$$U = 200(15) + 160(10) = 4600.$$

4. (10 points) (5 min) Si $a+b=ab=3$. Calcular $a^{128}+b^{128}$.

If $a+b=ab=3$. Calculate $a^{128}+b^{128}$.

Solution: Observemos que

$$(a^n+b^n)^2 = a^{2n}+2(ab)^n+b^{2n} \tag{1}$$
$$a^{2n}+b^{2n} = (a^n+b^n)^2-2(ab)^n \tag{2}$$

Usando (2) tenemos:

$$\begin{aligned}
n&=1, & a^2+b^2&=(3)^2-2(3)=3,\\
n&=2, & a^4+b^4&=(3)^2-2(3)^2=-3^2.\\
n&=4, & a^8+b^8&=(-3^2)^2-2(3)^4=-3^4.\\
n&=8, & a^{16}+b^{16}&=-3^8.\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Luego para $n=64$, tenemos que $a^{128}+b^{128}=-3^{64}$.

Solution: (Alternativa) Como $a+b=ab=3$ entonces $a(3-a)=3$ de donde tenemos la ecuación cuadrática $a^2-3a+3=0$ cuyas soluciones son

$$a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad a=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Observe que $b=\overline{a}$. Ahora, usando la fórmula de Moivre, tenemos

$$a=\sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{6}}$$
$$b=\sqrt{3}e^{\frac{-\pi i}{6}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
a^{128}+b^{128} &= \left(\sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{6}}\right)^{128}+\left(\sqrt{3}e^{\frac{-\pi i}{6}}\right)^{128}\\
&=3^{64}\left(e^{\frac{64\pi i}{3}}+e^{\frac{-64\pi i}{3}}\right)=3^{64}\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}+e^{\frac{-4\pi i}{3}}\right)\\
&=3^{64}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&=3^{64}(-1)\\
&=-3^{64}.
\end{aligned}$$

5. (10 points) (5 min) Un triángulo equilátero de lado n es dividido en n^2 triángulos equiláteros de lado 1 por medio de líneas paralelas a sus lados, esto produce una red de vértices conectada por segmentos de tamaño 1. ¿Cuál es el número máximo de segmentos que se pueden elegir de tal manera que no tres segmentos escogidos formen un triángulo? Justifique completamente su respuesta.

   An equilateral triangle side n is divided into n^2 equilateral triangles of side 1 by lines parallel to its sides, thus giving a network of nodes connected by line segments of length 1. What is the maximum number of segments that can be chosen so that no three chosen segments form a triangle? Justify your answer completely.

   Solution: Note que se forman $\frac{n(n+1)}{2}$ triángulos con base horizontal en la red (serie aritmética básica), y que cada segmento de la red pertenece a uno y sólo uno de estos triángulos.

   Por regla, de cada triángulo podemos escoger 2 lados como máximo. Si elegimos dos lados de cada uno de estos triángulos (con base horizontal), entonces tenemos $n(n+1)$ segmentos en total, y esto alcanzaría el número máximo posible para una selección.

   Luego, elijamos todos los segmentos de la red que no son horizontales. Note que, como cada triángulo tiene exactamente un segmento horizontal y dos segmentos que no los son, entonces está selección garantiza lo que buscamos.

6. (10 points) (5 min) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Sean a, b, c tres distintos enteros tal que $p(a) = p(b) = p(c) = -1$. Encuentre el número de raíces enteras de $p(x)$.

   Let $p(x)$ be a polynomial with integral coefficients. Let a, b, c be three distinct integers such that $p(a) = p(b) = p(c) = -1$. Find the number of integral roots of $p(x)$.

   Solution: Usando el teorema del residuo y el algoritmo de la división de polinomios tenemos que existe un polinomio $q(x)$ también con coeficientes enteros tal que

   $$p(x) = q(x)(x-a)(x-b)(x-c) - 1.$$

   Ahora, si d es una solución entera de $p(x) = 0$, entonces $q(d)(d-a)(d-b)(d-c) = 1$. Por lo tanto, $q(d) = \pm 1$, $d - a = \pm 1$, $d - b = \pm 1$ y $d - c = \pm 1$, dado que los factores son todos enteros.

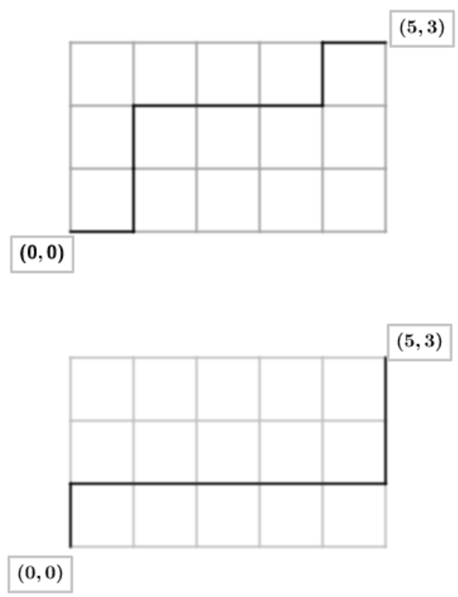
   Así, por lo menos dos de las variables a, b y c son iguales, lo que es un absurdo, esto es, **no es posible hallar soluciones enteras**.

7. (10 points) (5 min) ¿Cuál es el número de rutas en el plano xy que hay entre el origen $(0,0)$ y el punto (m,n)? Usar m y n enteros no negativos. Cada ruta es hecha por una serie de pasos, donde cada paso es una movida de una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba. (No se permiten las movidas a la izquierda o hacia abajo.)

   Dos de tales rutas de $(0,0)$ a $(5,3)$, a modo de ejemplo, son ilustradas en la figura.

   What is the number of paths in the xy plane between the origin $(0,0)$ and the point (m,n), where m and n are nonnegative integers, such that each path is made up of a series of steps, where each step is a move one unit to the right or a move one unit upward. (No moves to the left or downward are allowed.)

   Two such routes from $(0,0)$ to $(5,3)$, as an example, are illustrated in the next figure.



Solution: Una ruta del tipo deseada, consiste de m movidas a la derecha y n movidas hacia arriba. Cada una de estas rutas se puede representar por una cadena binaria de tamaño $m+n$ conteniendo exactamente m 0s y n 1s, donde 0 representa una movida a la derecha y 1 hacia arriba. El número de cadenas binarias de tamaño $m+n$ conteniendo exactamente n 1s es igual a $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$ porque esas cadenas son determinadas especificando la posición de los n 1s o especificando la posición de los m 0s.

8. (10 points) (5 min) Sea p un número real positivo. Considere todos los triángulos con perímetro p. Encuentre y describa el triángulo con perímetro p y mayor área. Justifique completamente.

Let p be a real positive number. Consider all the triangles with perimeter p. Find and describe the triangle with perimeter p and greatest area. Justify your answer.

Solution: Considere primero el conjunto de todos los triángulos con base de medida b. Ubicando de manera horizontal la base de uno de estos triángulos en un plano. Si movemos el vértice que no es un extremo de la base en el plano generando triángulos, manteniendo la base fija, y preservando el perímetro entonces se forma una trayectoria elíptica (¿por qué?). Se puede observar que de todos los triángulos formados el de mayor área se da cuando el vértice movido está en la bisectriz perpendicular de la base. De esta manera, con base fija, un triángulo de mayor área debe ser **isósceles**.

Considere entonces triángulos isósceles con base que miden b y los otros dos lados con medida a. Note que el perímetro es $p = 2a + b$. Usando el teorema de Pitágoras se puede obtener que el área de estos triángulos es

$$b\sqrt{\left(\frac{p-b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Para encontrar el área máxima elevamos está expresión al cuadrado, buscamos la derivada de la función cúbica resultante y analizamos sus signos. Luego tendremos que para $b \geq 0$, el valor máximo ocurre en $b = p/3$. Luego tendríamos que $a = p/3$ también. Resultando que el triángulo debe ser además de isósceles, **equilátero**.

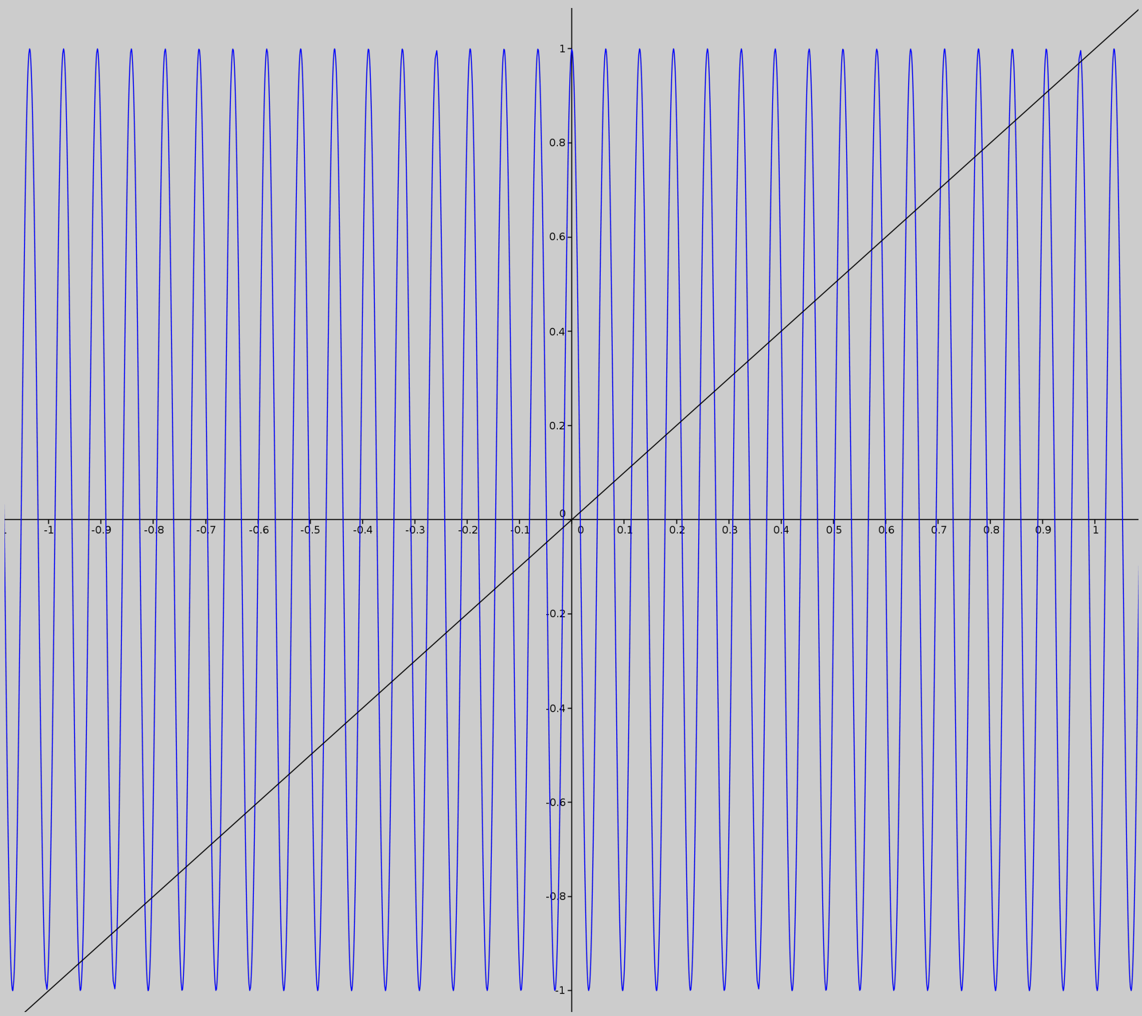
9. (10 points) (5 min) ¿Cuántas soluciones reales tiene $\cos(97x) = x$?

How many real solutions has the equation $\cos(97x) = x$?

Solution: El período de $\cos(97x)$ es $\frac{2\pi}{97}$, buscando cuántas veces cabe el período en el intervalo $[0, 1]$, i.e. $\frac{2\pi}{97}n < 1$, n entero no negativo, obtenemos que $n < \frac{97}{2\pi} \approx 15.44$, luego $n = 15$.

En cada periodo se corta dos veces la recta $y = x$ y calculando por simetría para la parte negativa, tenemos que la cantidad de soluciones son $2 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 1 = 61$.

La siguiente gráfica ilustra mejor lo mencionado anteriormente.



10. (10 points) (5 min) Suponga que $\lg n$ denota el logaritmo de n en base 2. Y la función $\lg^{(k)} n$ definida recursivamente por

$$\lg^{(k)} n = \begin{cases} n & \text{si } k = 0, \\ \lg(\lg^{(k-1)} n) & \text{si } \lg^{(k-1)} n \text{ esta definida,} \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el **Logaritmo Iterado** es la función $\lg^* n$ cuyo valor en n es el más pequeño entero no negativo k tal que $\lg^{(k)} n \leq 1$.

1. Encuentre $\lg^{(3)} 2^{65536}$.
2. Encuentre $\lg^* 65536$.
3. Encuentre el entero mas grande n tal que $\lg^* n = 5$. Aproxime el número de dígitos de este número.

Let $\lg n$ denote the logarithm of n to the base 2. The function $\lg^{(k)} n$ is defined recursively by

$$\lg^{(k)} n = \begin{cases} n & \text{if } k = 0, \\ \lg(\lg^{(k-1)} n) & \text{if } \lg^{(k-1)} n \text{ is defined,} \\ \text{undefined} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The **iterated logarithm** is the function $\lg^* n$ whose value at n is the smallest non-negative integer k such that $\lg^{(k)} n \leq 1$.

1. Find $\lg^{(3)} 2^{65536}$.
2. Find $\lg^* 65536$.
3. Find the largest integer n such that $\lg^* n = 5$. Estimate the number of decimal digits in this number.

Solution:

1.

$$\begin{aligned} \lg^{(3)} 2^{65536} &= \\ \lg(\lg^{(2)}(2^{65536})) &= \\ \lg(\lg(\lg^{(1)}(2^{65536})) &= \\ \lg(\lg(\lg(\lg^{(0)} 2^{65536}))) &= \\ \lg(\lg(\lg(2^{65536})) &= \\ \lg(\lg(65536)) &= \\ \lg(\lg(2^{16})) &= \\ \lg(2^4) &= 4 \end{aligned}$$

2. $\lg^* 65536 = 4$, usando la parte anterior.

3. El entero mas grande n tal que $\lg^* n = 5$ is 2^{65536}. Porque

$$\begin{aligned} 2^{65536} &= \\ 2^{2^{16}} &= \\ 2^{2^{2^4}} &= 2^{2^{2^{2^2}}}. \end{aligned}$$

El número aproximado de cifras decimales es

$$\log_{10}(2^{65536}) = 65536 \cdot \log_{10}(2) \approx 19728.$$