Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 3

Para el cuarto examen los estudiantes deben saber:

1. Enunciar todas las definiciones.
2. Enunciar y aplicar cada teorema que tenga nombre.
3. Encontrar puntos críticos de una función en un intervalo.
4. Encontrar el valor máximo y mínimo de una función en un intervalo dado.
5. Utilizar el Teorema de monotonía para saber donde una función crece y decrece.
6. Utilizar el Teorema de concavidad para saber donde una función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.
7. Determinar puntos de inflexión de una función.
8. Resolver problemas de optimización (problemas prácticos).
9. Graficar funciones mediante cálculo.
10. Resolver problemas relacionados al Teorema del Valor Medio.
11. Encontrar antiderivadas de funciones básicas.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 3

Nota: Es sumamente recomendable que trabaje los ejercicios asignados para cada sección. Los examenes viejos se deben ver como práctica adicional.

1. Encuentre las siguientes antiderivadas:
   (a) $\displaystyle\int \left(x^3 + 3x^2 + x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$ (b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)^2}{x}\, dx$

   (d) $\displaystyle\int \left(x\sqrt{x} + x^{1/4} + \frac{1}{x^5}\right) dx$ (e) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\, dx$ (f) $\displaystyle\int \sin(3x+2)\, dx$

   (g) $\displaystyle\int \left(\cos^3(x) + 4\cos(x) + 2\right)\sin(x)\, dx$

2. Encuentre los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos dados:
   (a) $x^2 + 4x + 4$ en $[-4, 1]$.
   (b) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ en $[-2, 3]$.
   (c) $\sin(x) + \cos(x)$ en $[0, \pi]$.
   (d) $\dfrac{1}{x^2+1}$ en $(-\infty, \infty)$.
   (e) $x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x - 1$ en $[-3, 2]$.
   (f) xe^{-x} en $[0, 2]$.

Pase a la siguiente página.

4. Determine los intervalos donde las siguientes funciones son: creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Además, encuentre los extremos locales y puntos de inflexión.

   (a) $x^3 - 12x + 1$

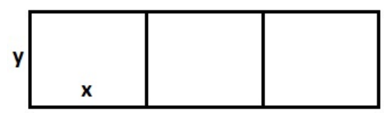
   (b) $\dfrac{x}{x^2+1}$

   (c) e^{-x^2}

   (d) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$

   (e) $x\sqrt{x-2}$ (cuidado con el dominio).

5. Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura), cada uno con un área de 300 pies cuadrados. Suponga que la cerca exterior de los corrales requiere una valla más firme que cuesta \$3 por pie, pero las dos particiones internas necesitan una cerca que cuesta sólo \$2 por pie. ¿Qué dimensiones de x y y producirán el costo más económico para los corrales?



6. Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, P, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar a 3 millas por hora y caminar a 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto P?

7. Gráfique las siguientes funciones:

   (a) $\dfrac{x}{x+2}$

   (b) $2x^3 - 6x$

   (c) $x^{2/3}$

   (d) $\dfrac{x^2+x-6}{x-1}$

8. Encuentre el número c garantizado por el Teorema del Valor Medio para $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ en $[0, 2]$.

9. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

   Note que $f(x)$ es diferenciable en $(0, 1)$, sin embargo no existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0.$$

   ¿Es ésto una contradicción al Teorema del Valor Medio? Explique su respuesta.

10. Suponga que $f(x)$ es una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $f(2) = 7$ y $f'(x) \geq 4$ para toda x. Demuestre que $f(10) \geq 39$.

Pase a la siguiente página.

11. ¿Para que valores de a, m y b la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1, \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 2]$? Consiga el número $c \in (0, 2)$ garantizado por el Teorema del Valor Medio.