



Apellidos: _____ Nombre: _____

No. de estudiante: _____ Profesor: _____

Tercer Examen: 16 de mayo de 2011 # de sección: _____

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. (16 puntos) Considere las funciones f y g definidas a continuación.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 1 - 10x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} |x| + 5 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2 & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

Evalúe cada una de las siguientes:

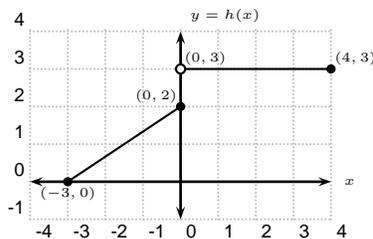
(a) $f(-10) + f(10) =$

(b) $g(-5) + g(5) =$

(c) $(f \circ g)(2) =$

(d) $(g \circ f)(2) =$

2. (6 puntos) Considere la gráfica de $y = h(x)$ de la figura. Escriba una definición por partes para la función $h(x)$.



3. (18 puntos) Sean

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad g(x) = \frac{1}{x}; \quad h(x) = x^2$$

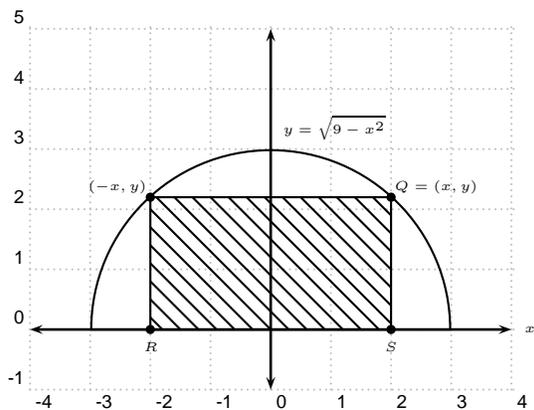
(a) En el mismo sistema de coordenadas, haga un dibujo de las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = f(x-5)$.

(b) En el mismo sistema de coordenadas, haga un dibujo de las gráficas de $y = g(x)$ y de $y = g(x) - 2$.

(c) En el mismo sistema de coordenadas, haga un dibujo de las gráficas de $y = h(x)$ y de $y = -h(2x)$.

4. (8 puntos) Considere el rectángulo de la figura. Note que dos de sus vértices están sobre el semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$ y los otros dos vértices R, S están sobre el eje x . Suponga que las coordenadas del vértice Q son $Q = (x, y)$.

(a) Escriba el área A del rectángulo como función de x .



(b) Escriba el perímetro P del rectángulo como función de x .

5. (16 puntos) Dado que $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 3x - 1$. Evalúe cada una de las siguientes:

(a) $(f \circ g)(x) =$

(b) $(g \circ f)(x) =$

|

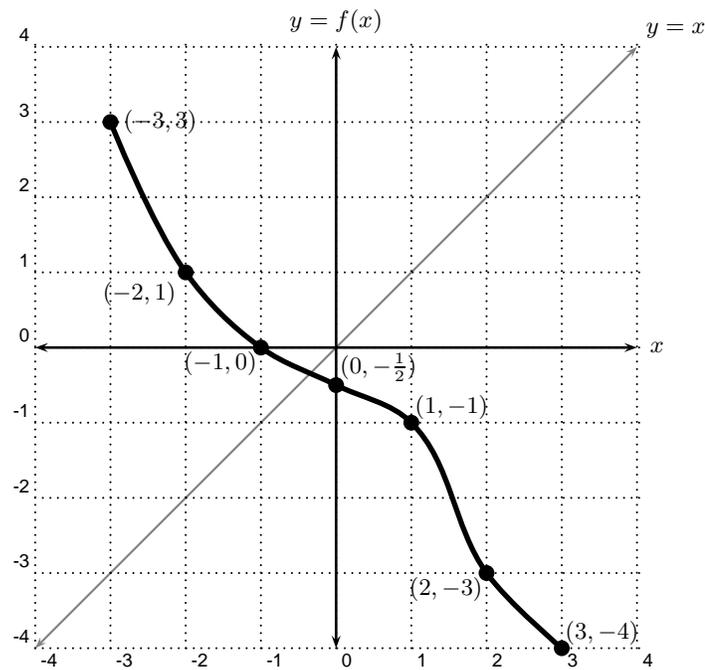
(c) $(f \circ f)(x) =$

(d) $(g \circ g)(x) =$

|

6. (8 puntos) Encuentre la función inversa de $f(x) = \frac{1-2x}{x-1}$.

7. (6 puntos) En la figura podemos ver la gráfica de una función $y = f(x)$ (la línea negra sólida). Se puede demostrar que la función f tiene una función inversa f^{-1} . En la misma figura haga un dibujo de la gráfica de f^{-1} .



8. (8 puntos) Demuestre, por inducción matemática, que la siguiente fórmula es cierta para todo número natural n ,

$$12 + 22 + 32 + \cdots + (10n + 2) = 5n^2 + 7n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. (8 puntos) Demuestre, por inducción matemática, que $81^n - 1$ es un múltiplo de 10 para todo número natural n . (**Ayuda.** $81^{k+1} - 1 = 81^{k+1} - 81 + 81 - 1$.)

10. (6 puntos) Evalúe los siguientes:

(a) $\binom{11}{4} =$

(b) $\binom{100}{4} + \binom{100}{3} =$



11. (6 puntos) Desarrolle completamente la expresión $(2x - 1)^5$ utilizando el teorema binomial.

12. (4 puntos) Indique cuál es el coeficiente de x^9 en el desarrollo de $(x + 10)^{11}$.