

Universidad de Puerto Rico

Recinto de Río Piedras
Departamento de Matemáticas
& Ciencia de Cómputos

Examen Graduado de Aprovechamiento
Fecha: 13 de octubre de 1998

Área: Topología

* * * Escoja exactamente **tres** de los **cinco** problemas. * * *

1 Problema

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y $x_0 \in X$. Demuestre que, f es continua en $x_0 \in X \iff$ para cada subconjunto A de X con $x_0 \in \overline{A}$, tenemos que $f(x_0) \in \overline{f(A)}$.

2 Problema

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función inyectiva y suprayectiva. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

- (i). f^{-1} es continua.
- (ii). f es una función abierta.
- (iii). f es una función cerrada.

3 Problema

Dé ejemplos de subconjuntos A y B de \mathbb{R}^2 (con la topología usual) que ilustren cada uno de los siguientes:

- (i). A y B conexos, pero $A \cap B$ no conexo.
- (ii). A y B conexos, pero $A \setminus B$ no conexo.
- (iii). A y B no conexos, pero $A \cup B$ conexo.
- (iv). A y B conexos con $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, pero $A \cup B$ no conexo.

4 Problema

- (i). Dé un ejemplo de dos espacios compactos cuya intersección no sea compacta.
- (ii). Por otro lado, demuestre que, si X es Hausdorff, entonces la intersección de cualquier familia de subespacios compactos es compacta.

5 Problema

- (i). En un espacio producto $X \times X$, el conjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es conocido como la diagonal. Demuestre que, X es Hausdorff \iff la diagonal es cerrada en $X \times X$.
- (ii). Sea $g : X \rightarrow Y$ una función y defina $G : X \rightarrow X \times Y$ como sigue, $G(x) = (x, g(x))$. Demuestre que, si g es continua, entonces G es un homeomorfismo entre X y su imagen $G(X)$.