Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas y Ciencia de Cómputos

Examen Graduado de Aprovechamiento

Área: Topología — Fecha: 21 de noviembre de 2002

* * * Escoja exactamente **tres** de los **cinco** problemas. * * *

1 Problema

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \{2n-1, 2n\}$.

(i). Demuestre que $\mathfrak{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{N}$.

(ii). Demuestre que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ no es compacto.

(iii). Demuestre que en el espacio topológico $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, todo conjunto infinito tiene puntos límites.

2 Problema

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida según indicamos a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+2}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x-2}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sean $\mathcal{T}_l$ la topología de límites inferiores sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{T}'$ la topología sobre el intervalo $[0,1)$ generada por la base $\mathfrak{B} = \{[a,b) \mid a, b \in [0,1), a < b\}$.

(i). Demuestre que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \to ([0,1), \mathcal{T}')$ es biyectiva.

(ii). Demuestre que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l) \to ([0,1), \mathcal{T}')$ es continua.

($\mathcal{T}_l$ está generada por la base $\mathfrak{B} = \{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$).

3 Problema

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Una función $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ es *fuertemente continua*, si $f(\overline{A}) \subseteq f(A)$ para todo $A \subseteq X$. Demuestre la siguiente proposición

$$\text{“}f \text{ es fuertemente continua} \iff f^{-1}(B) \text{ es cerrado para todo } B \subseteq Y.\text{”}$$

4 Problema

¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta? Si cierta, demuéstrela. Si falsa, dé un contraejemplo.

(i). "*Todo espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo es conexo por sendas*".

(ii). "*Todo espacio métrico completo es compacto*".

(iii). "*Todo espacio métrico compacto es completo*".

(Un espacio métrico (X, d) es *completo*, si toda sucesión de Cauchy es convergente).

5 Problema

El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *localmente euclídeo*, si para todo punto $x \in X$ hay una vecindad abierta U de x que es homeomorfa a $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}^n})$ (el espaco euclídeo n-dimensional).

(i). Demuestre que todo espacio topológico localmente euclídeo es T_1.

(ii). Construya un espacio topológico localmente euclídeo que no sea Hausdorff.