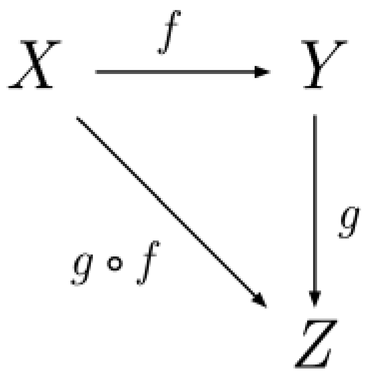
WIKIPEDIA

Teoría de categorías

La **teoría de categorías** es un estudio matemático que trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos. Al mismo tiempo trata de mostrar una nueva forma de ver las matemáticas sin incluir las nociones de elementos, pertenencia, entre otras.



Una categoría con objetos X,Y,Z y morfismos *f*, *g*, y *g*∘*f*.

Índice

Historia

La teoría de categorías fue introducida en Topología algebraica, por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1942, en un importante paso para la transición desde homología a Teoría de la homología. Stanislaw Ulam afirma que existían ideas parecidas en la escuela polaca de los años 30 (ver Stanislaw Ulam).[1]

Los desarrollos subsiguientes de la teoría fueron impulsados por las necesidades computacionales del Álgebra homológica y más tarde por las necesidades axiomáticas de la Geometría algebraica.[1] La teoría general -cierta actualización del álgebra universal con muchas características nuevas que daban pie a una cierta flexibilidad en semántica y lógicas de orden superior- vino más tarde.

Estas aplicaciones de categorías en el campo de los fundamentos están siendo trabajadas en bastante detalle y no solamente en matemáticas. Existen matemáticos como William Lawvere que trabajan en la física, existen físicos trabajando en *n*-categorías, John Baez. La Lógica Categórica es ahora un campo bien definido basado en la teoría de tipos para la Lógica intuicionista, con aplicaciones a la teoría de la programación funcional y la teoría de dominios, todas enmarcadas en una categoría cartesianamente cerrada como descripciones no sintácticas del cálculo lambda. El uso del lenguaje de la teoría de las categorías le permite a uno aclarar qué tienen exactamente en común todas estas áreas.

Relación filosófica

Se elige el término **categoría** de Aristóteles pero en el sentido de Kant con la intención de asociarlo a una **forma pura** pero en el contexto **exclusivamente** matemático, es decir, sin efectos fuera de las matemáticas.

Funtores

Con el concepto de **categoría** se pretende capturar -poniendo el énfasis en el concepto de relación (de aplicación), más que de elemento y pertenencia- la esencia de una clase de objetos matemáticos, que se relacionan mediante aplicaciones, los *morfismos* en la categoría en cuestión. Por ejemplo, la clase de los grupos: en vez de estudiar los objetos individuales (cada grupo) como se vino haciendo, se enfatizan dichos morfismos entre ellos, que no son otra cosa que las aplicaciones que "conservan su estructura". En el ejemplo de los grupos, dichos morfismos son los homomorfismos de grupos. Entonces, una vez que tenemos nuestro "universo categorial" definido -esto es, una categoría- es posible relacionarla con otras categorías mediante **funtores**, que son cierta generalización del concepto de función para categorías: un funtor asocia a cada objeto de una categoría un objeto de la otra, y a cada aplicación de la primera una aplicación de la segunda. De cierto modo nos lleva de una imagen de la categoría hacia la otra categoría, con ciertos grados de "afinamiento". Ciertas "construcciones naturales", como el grupo fundamental de un espacio topológico, pueden ser expresadas como funtores. Además, dichos funtores están muy a menudo naturalmente relacionados y esto lleva al concepto de transformación natural.

Categorías especiales, como los topos, están sirviendo también como alternativa "generalizadora" y conceptualmente más rica de la teoría de conjuntos como fundamento de las matemáticas.[*cita requerida*]

Aproximación de la teoría de clases

Para eliminar los problemas surgidos de las paradojas como la de Russell se planteó el siguiente *parche* a la Teoría de conjuntos:

Llamaremos "clase" a una agrupación de objetos.

Llamaremos "conjunto" a las clases capaces de ser, ellas mismas, objetos de otras clases.

Llamaremos "clase propia" a las clases incapaces de ser objetos de otra clase.

Definición de categoría

$\mathcal{A}$ es una categoría si consta de lo siguiente:

1) Una clase $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$, llamada *clase de objetos* de $\mathcal{A}$.

2) Para todo par de objetos $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$, un conjunto denotado por $\mathbf{hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ o $\mathbf{mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ (los subíndices pueden omitirse cuando está claro cuál es la categoría a la que se refieren). Los elementos de este conjunto se denominan *morfismos* de A a B. Un morfismo f de A a B se escribe también como $f : A \to B$ o también $A \xrightarrow{f} B$.

3) Una operación binaria, denominada *composición de morfismos* y denotada por $\circ$. Dados tres objetos A, B y C de $\mathcal{A}$, la composición define una aplicación $\circ : \mathbf{hom}(B, C) \times \mathbf{hom}(A, B) \to \mathbf{hom}(A, C)$. La composición de un morfismo $g : B \to C$ con un morfismo $f : A \to B$ se denota $g \circ f$ o simplemente gf. La operación composición satisface las siguientes propiedades:

a) Asociativa: si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos entre objetos A, B, C y D de $\mathcal{A}$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

b) Existencia de identidad: para todo objeto A de $\mathcal{A}$, existe un morfismo de A a sí mismo (es decir, un elemento de $\mathbf{hom}(A, A)$), denotado por I_A o también 1_A, y denominado *morfismo identidad*, y tal que, para morfismos cualesquiera $f : A \to B$ y $g : C \to A$, se tiene que $f \circ 1_A = f$ y que $1_A \circ g = g$.

Nota

Si las clases de objetos son solamente conjuntos, se dice que la categoría es "pequeña" (*small category*). Existen importantes categorías que no lo son.

Definición de subcategoría

Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que $\mathcal{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ si:

i) $\mathrm{ob}(\mathcal{B})$ es subclase de $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$

ii) $\forall A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{B}), \mathbf{mor}_{\mathcal{B}}(A, B) \subset \mathbf{mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$

iii) $\forall A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{B}), \forall f \in \mathbf{mor}_{\mathcal{B}}(A, B), \forall g \in \mathbf{mor}_{\mathcal{B}}(B, C),$

$$f \circ_{\mathcal{B}} g = f \circ_{\mathcal{A}} g$$

iv) $\forall A \in \mathrm{ob}(\mathcal{B}),\ I_A^{\mathcal{B}} = I_A^{\mathcal{A}}$.

nota

Se dice que la subcategoría es llena si $\mathbf{mor}_{\mathcal{B}}(A, B) = \mathbf{mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$

Ejemplos básicos

- La categoría **Con** o **Set**, cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre estos.
- La categoría **Top**, cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas entre estos.
- La categoría **Grp**, cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos entre estos.
- La categoría **Gab** o **Ab**, cuyos objetos son los grupos abelianos y cuyos morfismos son los homomorfismos entre estos. Es subcategoría llena de **Grp**.
- La categoría **Vec**$_K$, cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre un cuerpo K y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales entre estos.
- La categoría **An**, cuyos objetos son los anillos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre estos.
- La categoría **An**$_C$, cuyos objetos son los anillos conmutativos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre estos. Es subcategoría llena de **An**.
- Dado un conjunto parcialmente ordenado, $(P, \leq)$, existe una categoría $\mathcal{A}_P$ definida del siguiente modo: sus objetos son los elementos de P, y entre dos objetos X e Y existe un único morfismo (X, Y) si $X \leq Y$, y ninguno en caso contrario:

$$Mor(X,Y) = \begin{cases} \{(X,Y)\} & \text{si } X \leq Y, \\ \emptyset & \text{si no.} \end{cases}$$

- Dada una categoría $\mathcal{A}$, existe una categoría llamada **dual** o **opuesta**, denotada por $\mathcal{A}^{\text{op}}$ o $\mathcal{A}^{\text{o}}$, cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{A}$ y, $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{A})$, $Mor_{\mathcal{A}^{\text{op}}}(X,Y) := Mor_{\mathcal{A}}(Y,X)$.
- Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, existe la categoría **producto** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, cuyos objetos vienen dados por $Ob(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := \{(X,Y) \in Ob(\mathcal{A}) \times Ob(\mathcal{B})\}$ y con morfismos $Mor_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) := Mor_{\mathcal{A}}(X_1,X_2) \times Mor_{\mathcal{B}}(Y_1,Y_2)$.
- La categoría **Mod**$_R$ de todos los módulos por la derecha sobre el anillo R con unidad, junto con sus homomorfismos de módulos. Análogamente, la categoría de los módulos por la izquierda.
- La categoría **Met** de todos los espacios métricos junto a las funciones cortas.
- La categoría **Uni** de todos los espacios uniformes junto a los unimorfismos.
  - La categoría **Ord** de todos los conjuntos preordenados junto a las funciones crecientes.
- Una categoría monoidal es una categoría con una *operación asociativa* y un *único elemento neutral* con ésta operación. Los ejemplos prototípicos son la **categoría de conjuntos** con la operación: *unión disjunta* y el conjunto vacío como elemento neutro, y la **categoría de espacios vectoriales** sobre un cuerpo con el producto tensorial de espacios vectoriales y el mismo cuerpo como el único elemento neutral.
- Un grafo se puede considerar como una categoría pequeña: los objetos serían los vértices del grafo y los morfismos los caminos en el grafo. La composición de morfismos es la concatenación de caminos.
- Si *I* es un conjunto, la categoría: *categoría discreta sobre I* es la categoría pequeña que tiene como objetos a los elementos de *I* y como morfismos únicamente a los morfismos identidad (que hay en toda categoría, como recordaréis).

- La categoría **Mag** de todos los magmas junto con sus homomorfismos.
  - La categoría **Med** de todos los magmas mediales junto con sus homomorfismos.
- La cat **Mon**, de los monoides y sus monoide-morfismos. Usadas en TQFT, álgebras de Frobenius, cobordismo.

Definiciones para tipos de morfismos

Dada una categoría $\mathcal{A}$ y objetos $A, B \in Ob(\mathcal{A})$, diremos que un morfismo $f \in Mor(A, B)$ es :

- monomorfismo si $\forall C \in Ob(\mathcal{A})$ y $\forall g, h \in Mor(C, A)$ tales que $fg = fh$, siempre sucede que o implica que $g = h$.

- epimorfismo si $\forall C \in Ob(\mathcal{A})$ y $\forall g, h \in Mor(B, C)$ tales que $gf = hf$, siempre sucede que o implica que $g = h$.

- isomorfismo si $\exists g \in Mor(B, A) : fg = I_B$ y $gf = I_A$.

- endomorfismo si $A = B$.
- automorfismo si f es un isomorfismo y $A = B$.

Proposición

Dada una categoría $\mathcal{A}$, objetos $A,\ B \in Ob(\mathcal{A})$, y $f \in Mor(A, B)$, se cumplen:

- $\forall C \in Ob(\mathcal{A})$ y $\forall g \in Mor(B, C)$ tal que gf es un monomorfismo, implica que f es un monomorfismo.

- $\forall C \in Ob(\mathcal{A})$ y $\forall g \in Mor(C, A)$ tal que fg es un epimorfismo, implica que f es un epimorfismo.

- $\forall f$ isomorfismo, implica que es monomorfismo y epimorfismo.

Demostración

Para el primero, ver que f es un monomorfismo:

Tomando $\forall h_1, h_2 \in Mor(C, A)$ tales que $fh_1 = fh_2$, entonces también $g(fh_1) = g(fh_2)$, por 3)b) de la definición de categoría, tenemos que $(gf)h_1 = (gf)h_2$ y como gf es monomorfismo, implica que $h_1 = h_2$ y tenemos por definición que f es un monomorfismo.

Lo mismo para el segundo, ver que f es epimorfismo:

Tomando $\forall h_1, h_2 \in Mor(B, C)$ tales que $h_1 f = h_2 f$, entonces también $(h_1 f)g = (h_2 f)g$, por 3)b) de la definición de categoría, tenemos que $h_1(fg) = h_2(fg)$ y como fg es un epimorfismo, implica que $h_1 = h_2$ y tenemos por definición que f es un epimorfismo.

Para el tercero, si $\exists g \in Mor(B, A)$ tal que $fg = I_B$ y $gf = I_A$

Tomando $\forall h_1, h_2 \in Mor(B, C)$ tales que $fh_1 = fh_2$, entonces también $g(fh_1) = g(fh_2)$, por 3)b) de la definición de categoría, tenemos que $(gf)h_1 = (gf)h_2$ y como $gf = I_A$, implica que $I_A h_1 = I_A h_2$, implica que $h_1 = h_2$, e implica que f es un monomorfismo..

Tomando $\forall h_1, h_2 \in Mor(B, C)$ tales que $h_1 f = h_2 f$, entonces también $(h_1 f)g = (h_2 f)g$, por 3)b) de la definición de categoría, tenemos que $h_1(fg) = h_2(fg)$ y como $fg = I_B$, implica que $h_1 I_B = h_2 I_B$, implica que $h_1 = h_2$, e implica que f es un epimorfismo.

Nota

Existen morfismos que son monomorfismos y epimorfismos que no son isomorfismos.

Definiciones para tipos de objetos

Dada una categoría $\mathcal{A}$, diremos que un objeto $A \in Ob(\mathcal{A})$ es:

- **inicial** si $\forall B \in Ob(\mathcal{A}), \exists! f \in Mor(A, B)$.
- **final**, si $\forall B \in Ob(\mathcal{A}), \exists! f \in Mor(B, A)$.
- **nulo**, si es inicial y final a la vez.

Ejemplos

- En la categoría **Con**, el Conjunto vacío es un objeto inicial, y todo conjunto formado con un único elemento es un objeto final en la categoría de conjuntos.

Proposición

Dada una categoría $\mathcal{A}$, entre sus objetos iniciales/finales hay un único isomorfismo.

Demostración

Dados A y B objetos iniciales/finales, entonces los siguientes conjuntos de morfismos solo tienen un elemento:

$$Mor(A,A) = \{I_A\}$$
$$Mor(A,B) = \{f\}$$
$$Mor(B,A) = \{g\}$$
$$Mor(B,B) = \{I_B\}$$

como $gf \in Mor(A,A)$ entonces $gf = I_A$ y como $fg \in Mor(B,B)$ entonces $fg = I_B$, por tanto entre A y B hay un único isomorfismo.

Definición de funtor

Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es:

- **funtor covariante** si:

  1),$\forall A \in Ob(\mathcal{A})$, tenemos que $F(A) \in Ob(\mathcal{B})$.

  2),$\forall X, Y \in Ob(\mathcal{A}),\ \forall f \in Mor_{\mathcal{A}}(X,Y)$, tenemos que $F(f) \in Mor_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$ tal que:

  a),$\forall A \in Ob(\mathcal{A})$, tenemos que $F(I_A) = I_{F(A)}$.

  b), $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{A}),\ \forall f \in Mor_{\mathcal{A}}(X,Y),\ \forall g \in Mor_{\mathcal{A}}(Y,Z)$,

  $$F(g \circ_{\mathcal{A}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{B}} F(f).$$

- **funtor contravariante** si:

  1),$\forall A \in Ob(\mathcal{A})$, tenemos que $F(A) \in Ob(\mathcal{B})$.

  2),$\forall X, Y \in Ob(\mathcal{A}),\ \forall f \in Mor_{\mathcal{A}}(X,Y)$, tenemos que $F(f) \in Mor_{\mathcal{B}}(F(Y), F(X))$ tal que:

  a),$\forall A \in Ob(\mathcal{A})$, tenemos que $F(I_A) = I_{F(A)}$.

  b), $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{A}),\ \forall f \in Mor_{\mathcal{A}}(X,Y),\ \forall g \in Mor_{\mathcal{A}}(Y,Z)$,

  $$F(g \circ_{\mathcal{A}} f) = F(f) \circ_{\mathcal{B}} F(g).$$

Nota

Dadas tres categorías $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, y dos funtores covariantes $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, la composición es el funtor covariante $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ tal que:

- , $\forall X \in Ob(\mathcal{A}),\ GF(X) = G(F(X))$

- , $\forall f \in Mor_{\mathcal{A}},\ GF(f) = G(F(f))$.

Ejemplos

- Dada una categoría $\mathcal{A}$, diremos que es el **funtor identidad** a $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ si deja todo $\mathcal{A}$ igual, claramente es un funtor covariante recurriendo a la definición.
- Dadas una categoría $\mathcal{A}$ y una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, diremos que es **funtor inclusión** $i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ si deja todo $\mathcal{B}$ igual, claramente es funtor covariante recurriendo a la definición.

Definiciones para tipos de funtores

Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, diremos que un funtor covariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es:

- **pleno** si, $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{A}),\ F_{|Mor(X,Y)}$ es exhaustivo.
- **fiel** si, $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{A}),\ F_{|Mor(X,Y)}$ es inyectivo.
- **plenamente fiel** si, $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{A}),\ F_{|Mor(X,Y)}$ es biyectivo.
- **denso** si, $\forall B \in Ob(\mathcal{B}),\ \exists A \in Ob(\mathcal{A}) : B$ es isomorfo a $F(A)$.

Dado un funtor covariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, diremos que es un isomorfismo de categorías, si $\exists G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}\ :\ GF = I_{\mathcal{A}}$ y $FG = I_{\mathcal{B}}$.

Definición de transformación natural

Dadas dos categorías $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y dos funtores covariantes $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, hay una **transformación natural** τ entre F y G si tiene:

- , $\forall X \in Ob(\mathcal{A})$, un morfismo $\tau_X\ : F(X) \to G(X)$
- , $\forall f \in Mor_{\mathcal{A}}(X, Y),\ G(f)\tau_X = \tau_Y F(f)$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\tau_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & G(Y) \end{array}$$

Diremos que un morfismo τ es una **equivalencia** si $\forall X \in Ob(A),\ \tau_A$ es un isomorfismo.

Diremos que un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una **equivalencia** si existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $GF = I_{\mathcal{A}}$ y $FG = I_{\mathcal{B}}$, donde diremos que las dos categorías son equivalentes.

Ejemplos

Espacio vectorial dual: un ejemplo de un funtor contravariante desde la categoría de todos los espacios vectoriales reales a la categoría de todos los espacios vectoriales reales está dado por la asignación a cada objeto (cada espacio vectorial real) un objeto llamado espacio dual y a cada morfismo (esto es, a cada aplicación lineal), su dual o traspuesta.

Álgebra de las funciones continuas: un funtor contravariante desde la categoría de los espacios topológicos (cuyos morfismos son las aplicaciones continuas) a la categoría de las álgebras asociativas reales, es dado asignando a cada espacio topológico*X* el álgebra C(*X*) de todas las funciones reales continuas sobre tal espacio. Cada aplicación continua $f : X \to Y$ (morfismo en la categoría de espacios topológicos) induce un homomorfismo de álgebras $C(f) : C(Y) \to C(X)$ mediante la regla $C(f)(\varphi) = \varphi \circ f$ para todo φ en C(*Y*).

Homomorfismo de grupos: a cada par *A*, *B* de grupos abelianos se puede asignar el grupo abeliano Hom(*A*,*B*) que consiste en todos homomorfismos de grupos desde *A* a *B*. Esto es un funtor que es contravariante en el primer argumento y covariante en el segundo, esto es, es un funtor $\mathbf{Ab}^{op} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ (donde **Ab** denota la categoría de los grupos abelianos con los homomorfismos de grupos). Si $f : A_1 \to A_2$ and $g : B_1 \to B_2$ son morfismos en **Ab**, entonces se tiene este homomorfismo $\mathrm{Hom}(f,g) : \mathrm{Hom}(A_2,B_1) \to \mathrm{Hom}(A_1,B_2)$ dado por $\varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$.

Funtores 'Olvido', o 'Forgetful': el funtor $F : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ que aplica un anillo hacia su grupo subyacente abeliano es un funtor que olvida ("forgetful"), que nos crea una imagen de algo más "rico" en un objeto más pobre, con menos estructura. Los morfismos en la categoría de **Anillos** (homomorfismos de anillos) se convierten en morfismos en **Ab** (la categoría de grupos abelianos y sus homomorfismos).

Productos tensoriales: Si *C* denota la categoría de los espacios vectoriales sobre un cuerpo fijado, con las aplicaciones lineales como morfismos, entonces el producto tensorial *V* [símbolo] *W* define un funtor $C \times C \to C$ que es covariante en ambos argumentos.

Álgebras de Lie: A cada grupo de Lie real o complejo se le asigna su real (o compleja) Álgebra de Lie, con lo que se define un funtor.

Grupo fundamental: Considera la categoría de los espacios topológicos con "puntos base", con "puntos distinguidos". Los objetos son los pares (*X*,*x*), donde *X* es un espacio topológico y *x* es un elemento de *X*. Un morfismo desde (*X*,*x*) hacia (*Y*,*y*) viene dado por una aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$.

Para cada espacio topológico con punto base (*X*,*x*), definiremos un grupo fundamental. El cual va a ser un funtor desde la categoría de los espacios topológicos con puntos base hacia la categoría de los grupos.

Sea *f* una función continua desde el intervalo unidad [0,1] hacia *X* tal que $f(0) = f(1) = x$. (Esto es equivalente a que, *f* sea una aplicación continua desde el círculo unidad en el plano complejo tal que $f(1) = x$.) Llamamos a tal función un lazo en *X*. Si *f* y *g* son lazos en *X*, podemos pegarlos uno a continuación del otro definiendo $h(t) = f(2t)$ cuando *t* recorra [0,0.5] y $h(t) = g(2(t - 0.5))$ cuando *t* recorra [0.5,1]. Es fácil comprobar que este *h* también es un lazo. Si existe una aplicación continua $F(x,t)$ desde [0,1] × [0,1] a *X* tal que $f(t) = F(0,t)$ es un lazo y $g(t) = F(1,t)$ es también un lazo entonces se dice que *f* y *g* son equivalentes. Se puede probar que esto define una relación de equivalencia. Nuestra regla de composición asegura que todo vaya bien. Ahora, además, podemos ver que se tiene un elemento neutro $e(t) = x$ (una aplicación constante) y que cada lazo tiene un lazo inverso. De hecho, si $f(t)$ es un lazo entonces $f(1 - t)$ es su inverso. El conjunto de clases de equivalencia de lazos forma entonces un grupo (el grupo fundamental de *X*). Se puede comprobar que la aplicación desde la categoría de espacios topológicos con punto base a la categoría de grupos es funtorial: un (homo/iso)morfismo topológico se hará corresponder naturalmente a un (homo/iso)morfismo de grupos.

Teoría de haces: prehaces. Si *X* es un espacio topológico, entonces los conjuntos abiertos en *X* pueden ser considerados como los objetos de una categoría *C*X; existiendo un morfismo de *U* a *V* si y sólo si *U* es un subconjunto de *V*. En sí misma, esta categoría no es muy excitante, pero los funtores desde $C\mathrm{X}^{op}$ hacia otras categorías, llamados *pre-haces sobre X*, son interesantes. Por ejemplo, asignando a cada conjunto abierto *U* el álgebra asociativa de las funciones reales sobre *U*, se obtiene un pre-haz de álgebras sobre *X*.

Este ejemplo de motivación se generaliza mediante la consideración de pre-haces sobre categorías arbitrarias: un pre-haz sobre *C* es un funtor definido sobre C^{op}. El Lema de Yoneda da cuenta de que a menudo una categoría *C* puede extenderse mediante la consideración de la categoría de pre-haces sobre *C*.

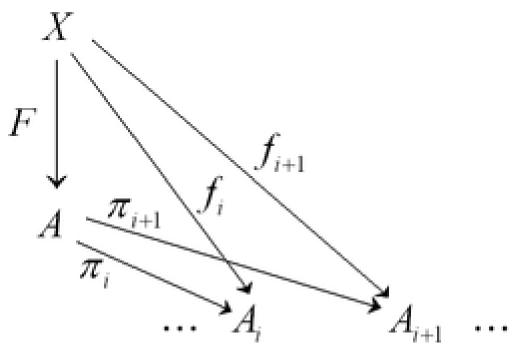
La Categoría de las categorías pequeñas: La categoría **Cat** posee como objetos a todas las categorías pequeñas, y como morfismos a los funtores entre ellas.

Construcciones universales

Los funtores son a menudo definidos por medio de propiedades universales; como ejemplos tenemos los productos tensoriales de arriba, la suma directa y el producto directo de grupos o de espacios vectoriales, la construcción de los grupos libres módulos, y límites directos e inversos. Los conceptos de límite y colímite generalizan múltiples conceptos. Las construcciones universales a menudo dan lugar a pares de funtores adjuntos.

Producto

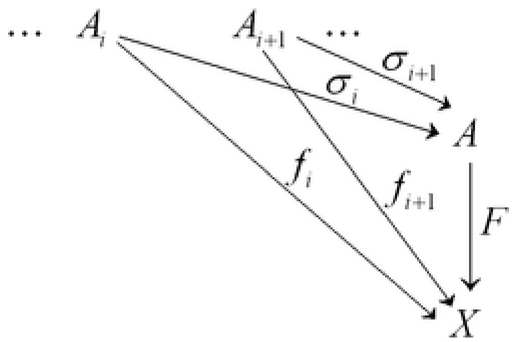
Dada una categoría $\mathcal{A}$ y una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, llamaremos **producto** de $\{A_i\}_{i\in I}$ al par $(A,\{\pi_i\}_{i\in I})$ donde $A\in Ob(\mathcal{A})$ y $\{\pi_i\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos donde $\pi_i : A\to A_i\ \forall i\in I$, y tal que satisface la condición de que para cada familia $\{f_i\}_{i\in I}$, donde $f_i : X\to A_i\ \forall i\in I$, existe un único morfismo $F : X\to A$ tal que $\pi_i F = f_i,\ \forall i\in I$.



El producto se denota por $\prod_{i\in I} A_i = A$ y en particular también $A_1\times\cdots\times A_n = A$ si $I=\{1,\ \ldots,n\}$.

Coproducto

Dada una categoría $\mathcal{A}$ y una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, llamaremos **coproducto** de $\{A_i\}_{i\in I}$ al par $(A,\{\sigma_i\}_{i\in I})$ donde $A\in Ob(\mathcal{A})$ y $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos donde $\sigma_i : A_i\to A\ \forall i\in I$, y tal que satisface la condición de que para cada familia $\{f_i\}_{i\in I}$, donde $f_i : A_i\to X\ \forall i\in I$, existe un único morfismo $F : A\to X$ tal que $F\sigma_i = f_i,\ \forall i\in I$.



El coproducto se denota por $\coprod_{i \in I} A_i = A$.

- Ejemplo de construcción universal: Extensión de Kan.

Otros conceptos y resultados

Las definiciones de categorías y funtores nos proveen sólo de la base inicial del álgebra categorial. Los tópicos listados abajo son muy importantes. Aunque hay fuertes interrelaciones entre todos ellos, el orden en que los damos puede ser considerado una guía para posteriores lecturas.

- transformación natural: Mientras los funtores dan un camino para pasar, imprimir una categoría en otra, las transformaciones naturales nos proveen de una relación similar entre funtores.
- El Lema de Yoneda es uno de los resultados más famosos de la teoría de categorías.
- Límites y colímites: Para introducir ciertas construcciones como los productos (de conjuntos, de topologías, de órdenes parciales, ...), en la teoría, los límites y los colímites son de ayuda.
- funtores adjuntos: Un funtor puede ser el adjunto por la izquierda (o por la derecha) de otro funtor que vaya en la dirección opuesta. Sin embargo, cuando los comparamos con las relaciones clásicas de las aplicaciones que preservan las estructuras (inversas...), el concepto de adjunción de funtores aparenta ser bastante abstracto y general. Es de gran utilidad aún y tiene relación con muchos otros conceptos importantes, como ocurre en la construcción de límites.
- equivalencia de categorías: Para obtener un criterio adecuado para discernir si dos categorías pueden o no ser consideradas similares, es necesario encontrar una noción más general que el concepto clásico de isomorfismo. Las equivalencias de categorías están muy relacionadas con **dualidad de categorías**.
- diagramas conmutativos: Ya que la teoría de categorías trata usualmente con objetos y flechas es conveniente expresar las identidades mediante diagramas.

Referencias

1. Introducción al álgebra abstracta".Juan Francísco Escamílla Catillo , pp. 329.

Bibliografía

Los dos textos de Lawvere son las introducciones más sencillas que existen. El de Mac Lane es uno "clásico" en esta materia, y el Borceaux es una pequeña enciclopedia.

- William Lawvere & Steve Schanuel, *Matemáticas Conceptuales: Una primera introducción a categorías*, Siglo XXI, 2002 (traducción de Marmolejo Rivas, Francisco a partir de *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- William Lawvere & Steve Schanuel, *Sets for mathematics*, Cambridge University Press, 2003.
- Saunders Mac Lane (1998): *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer; ISBN 0-387-98403-8
- Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra*, volumes 50-52 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.
- Juan Francísco Escamilla Castillo. *Introducción al Álgebra Abstracta*, Lulu.
- A. J. Berrick & M. E. Keating. *Categories and Modules*. Cambridge University Press. 2000.

Enlaces externos

- Primera presentación: http://www.jstor.org/stable/1990284
- Un proyecto que pretende comenzar la divulgación en castellano es el de http://arrows.ourproject.org/.
- "Category Theory" artículo en inglés de Jean-Pierre Marquis en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [1] (http://plato.stanford.edu/entries/category-theory/).
- Category Theory. (https://planetmath.org/{{{id}}}) en PlanetMath.