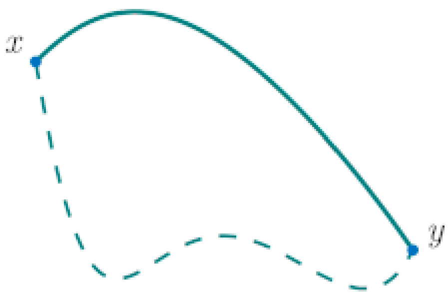
WIKIPEDIA

Homotopía

En topología, y más precisamente en topología algebraica, dos aplicaciones continuas de un espacio topológico en otro se dicen **homótopas** (del griego *homos* = mismo y *topos* = lugar) si una de ellas puede "deformarse continuamente" en la otra.



Los dos caminos en líneas punteadas que se muestran arriba son homótopos en relación a sus extremos. La animación muestra una posible homotopía entre ellos.

Índice

Definición formal
Tipo homotópico
Usos
Teorema fundamental del álgebra
Grupo fundamental
Referencias
Bibliografía
Enlaces externos

Definición formal

Dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ se dicen homótopas si existe otra aplicación (continua también) $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que:

$$H(x,0) = f(x)$$
$$H(x,1) = g(x)$$

Un ejemplo importante son las diferentes clases (de homotopía) de mapeos del círculo a un espacio X

$$S^1 \to X$$

la estructura resultante es el importantísimo grupo fundamental.

- Si dos aplicaciones *f* y *g* son homótopas, se escribe *f* ≃ *g*; lo que significa esta relación es efectivamente una relación de equivalencia sobre el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y, Las clases de equivalencia se denominan *clases de homotopía* de aplicaciones.[1]

Tipo homotópico

Se dice que dos espacios *X*, *Y* tienen el mismo **tipo de homotopía**, si existe un par de aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} X$ tales que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homótopas a Id_X y Id_Y respectivamente.

Suele ser utilizado el símbolo: $f \simeq g$, para indicar que los objetos *f* y *g* son **homótopos**.

Como ejemplos, una 1-esfera y un toro sólido tienen el mismo tipo de homotopía. Un espacio topológico que tiene el mismo tipo de homotopía que un conjunto unitario se dice contráctil.

Usos

Teorema fundamental del álgebra

La homotopía es la fuente de muchas demostraciones. Un ejemplo famoso es el Teorema fundamental del álgebra, que indica que cualquier polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$[4] .

Para demostrarlo, consideramos un polinomio unitario P que no tiene raíz en $\mathbb{C}$ y probaremos que su grado n es cero. Para cada r real positivo , definimos el bucle α_r mediante :

$$\forall t \in [0,1] \quad \alpha_r(t) = \frac{P(r\exp(2\pi \mathrm{i} t))/P(r)}{|P(r\exp(2\pi \mathrm{i} t))/P(r)|}.$$

Por definición, α_r es un bucle definido en el círculo. Si r es igual a 0, obtenemos el bucle constante igual a 1. Como la función que asocia α_r(t) con r y t es continua, todos los bucles α_r son homotópicos en un punto.

Sea (a_j) la secuencia de los coeficientes de *P* y ρ un número real mayor que 1 y que la suma $\Sigma|a_j|$ de módulos de coeficientes de *P* . Si *z* es un complejo de módulo ρ,

$$(1) \quad |z^n| = \rho^n > (|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|)\rho^{n-1} \geq |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|.$$

Definimos el polinomio P_s y el bucle β_s mediante:

$$P_s(z) = s(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}) + z^n, \quad \forall t \in [0,1] \quad \beta_s(t) = \frac{P_s(\rho\exp(2\pi \mathrm{i} t))/P_s(\rho)}{|P_s(\rho\exp(2\pi \mathrm{i} t))/P_s(\rho)|}.$$

Las desigualdades (1) muestran que si | s | ≤ 1, el polinomio P_s no admite una raíz de módulo ρ por lo que el bucle β_s está bien definido. El bucle β_0 realiza n vueltas alrededor del origen, según el párrafo anterior. Dado que la función que asocia $\beta_s(t)$ con s y t es continua, este bucle β_0 es homotopico a $\beta_1 = \alpha_\rho$. Como este último es homotópico en un punto, es decir que hace 0 vueltas alrededor del origen, n es igual a 0.

Grupo fundamental

Si X es un espacio topológico, podemos componer dos bucles de la misma base p (es decir, del mismo origen y del mismo final p) α_1 y α_2 construyendo un bucle que primero atraviese la trayectoria de α_1 , luego el de α_2. Esta composición es compatible con la relación de equivalencia que es homotópica a. Cociente de esta relación de equivalencia, obtenemos una estructura de grupo denominada *grupo fundamental* o *grupo de Poincaré*.[2] Esta noción se generaliza y permite definir una infinidad degrupos de homotopía.

Este grupo está en el origen de las manifestaciones. Uno de los más famosos es el del Teorema del punto fijo de Brouwer en la dimensión dos, que indica que cualquier mapa continuo del disco en sí mismo admite un punto fijo.

Referencias

1. Munkres: "Topología"
2. Lannes 2004, p. 8 ou (en) Allen Hatcher, Algebraic Topology, New York, CUP, 2001, 544 p. ISBN 978-0-521-79540-1.

Bibliografía

- Weisstein, Eric W. «Homotopía» (http://mathworld.wolfram.com/Homotopy.html). En Weisstein, Eric W, ed. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), «Homotopía» (http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Homotopy&oldid=18180), *Encyclopaedia of Mathematics* (en inglés), Springer, ISBN 978-1556080104.

Enlaces externos

- Wikiversidad alberga proyectos de aprendizaje sobre **Homotopía**.