WIKIPEDIA

Homología (matemática)

En matemática (especialmente en topología algebraica y en álgebra homológica), la **homología** (en Griego homos = idéntico) es un procedimiento general para asociar un objeto matemático dado (por ejemplo un espacio topológico o un grupo) con una sucesión de grupos abelianos (o en contextos más generales módulos o cualquier elemento sobre una categoría abeliana), es decir una acción functorial.

Para un espacio topológico, los grupos de homología son generalmente mucho más fáciles de computar que los grupos de homotopía, y consecuentemente, uno habitualmente tendrá un trabajo más simple con homología para ayudar en la clasificación de espacios.

Una observación que motiva esta teoría es que a veces podemos distinguir parejas de espacios topológicos, por medio del estudio de sus agujeros. Por ejemplo:

- Un círculo no es equivalente a un disco porque el círculo tiene un agujero en medio de él.
- Una esfera no es equivalente a un círculo, ya que la esfera encierra un agujero 2-dimensional, mientras que el círculo encierra un agujero 1-dimensional.

En general, no es inmediato ni definir lo que es un agujero, ni distinguir distintos tipos de agujeros. Es por ello que la motivación original de homología fue definir y clasificar los agujeros de un espacio topológico, por ejemplo en una variedad.

La definición de los grupos de homología se fundamenta en los conceptos de *ciclos*, - que son subvariedades cerradas - *fronteras*, -que son ciclos y a la vez fronteras de una subvariedad-, y *clases de homología* -que son las clases de equivalencia que obtenemos al cocientar los ciclos módulo las fronteras. Entonces, cada clase de homología está representada por un ciclo que no es frontera de ninguna subvariedad, e indica la ausencia de una variedad cuya frontera sería dicho ciclo. Así mismo, cada generador indica la existencia de un agujero y las propiedades del grupo indican la estructura del espacio topológico, así como lo hacen las nociones de dimensión y orientabilidad.

Existen diferentes teorías de homología. Dependiendo del objeto matemático que estemos estudiando - por ejemplo, un espacio topológico o un grupo-, podremos asociarle algunas de estas teorías. Cuando podemos describir geométricamente a dicho objeto, el n-avo grupo de homología describe el comportamiento del objeto en la n-ava dimensión.

Índice

Definición

Se define el n-ésimo **grupo de homología** asociado a un complejo de cadenas

$$\ldots \to A_{n+1} \overset{\delta_{n+1}}{\to} A_n \overset{\delta_n}{\to} A_{n-1} \to \ldots$$

donde $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$

como el grupo abeliano

$$H(A_n) = \frac{\ker(\delta_n)}{\mathrm{im}(\delta_{\mathrm{n+1}})}.$$

También se utiliza la notación

$H_n(A)$, donde A es el complejo de cadenas respectivo.

Se llama $\ker(\delta_n)$ los ciclos en A_n y se llama $\mathrm{im}(\delta_{\mathrm{n+1}})$ las fronteras de A_n.

Se dice que la homología mide la falta de exactitud de un complejo de cadenas en cada uno de sus *eslabones*. Por ejemplo si tenemos un complejo de cadenas corto

$$0 \to A_1 \overset{a_1}{\to} A_2 \overset{a_2}{\to} A_3 \to 0$$

entonces sus correspondientes grup(os de homología son:

$$H(A_1) = \ker a_1, \qquad H(A_2) = \frac{\ker a_2}{\mathrm{im}\ a_1}, \qquad H(A_3) = \frac{A_3}{\mathrm{im}\ a_2}$$

Es obvio que si la sucesión fuese exacta, entonces estos grupos serían triviales (=0).

Véase también

- Álgebra homológica
- Cohomología

Referencias

- Hatcher, Allen (2002) *Algebraic Topology (http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html)* Cambridge University Press

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Homology» (http://mathworld.wolfram.com/Homology.html). En Weisstein, Eric W, ed. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.