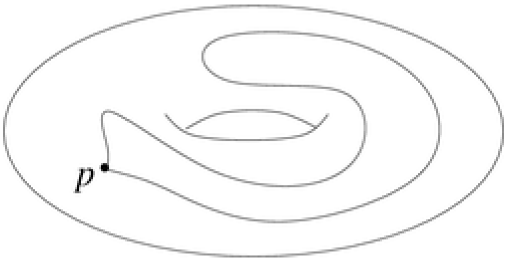
WIKIPEDIA

Grupo fundamental

En topología, podemos asociar a cada punto p de un espacio topológico X un grupo que nos informa sobre la estructura 1-dimensional de la porción de espacio que rodea a este punto. Los elementos de este grupo, llamado **grupo fundamental** de X relativo al **punto base** $\boldsymbol{p}$,[1] son clases de equivalencia de lazos (curvas cerradas) con origen en el punto p.



Mediante lazos con base en un punto fijo podemos explorar el espacio topológico al que pertenece. Las clases de equivalencia de estos lazos formarán el grupo fundamental.

Existen generalizaciones a dimensión superior de este grupo, que reciben el nombre de grupos de homotopía. El grupo fundamental recibe también el nombre de **primer grupo de homotopía**. De ahí la forma común de notarlo como $\pi_1(X, p)$.

Índice

Definiciones

Lazo

Sea X un espacio topológico, y p un punto fijo de X. Un **lazo** con base en p es una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \to X$ que verifica $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

El producto $\alpha * \beta$ de dos lazos α y β se define como $(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ Esto es, el lazo $\alpha * \beta$ primero recorre el camino de α, pero a "doble velocidad" y después el de β, también a doble velocidad.

Clases de homotopía

Las **clases de homotopía** son las clases de equivalencia debidas a la relación de ser homotópico. Dos lazos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ con base en un punto común p son homotópicos si existe una aplicación continua $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{aligned} &H(s,0) = \alpha(s) \\ &H(s,1) = \beta(s) \\ &H(0,t) = p \\ &H(1,t) = p\,. \end{aligned}$$

Intuitivamente una clase de homotopía representa un paquete de curvas que son deformables entre sí.

Grupo fundamental

El producto de dos clases de homotopía de lazos [*f*] y [*g*] se define como [*f* * *g*]. Puede demostrarse que este producto está bien definido al ser independiente de la elección de representantes. Este producto nos permite obtener una estructura de grupo: el elemento neutro será la clase [γ] del lazo trivial definido como γ(*t*) = *p* para todo *t*; el inverso de la clase de un lazo [*f*] será la clase del mismo lazo recorrido en sentido contrario (es decir, *g* es el elemento simétrico de *f* si y solo si *f*(*t*) = *g*(1 – *t*) para todo *t* ∈ [0, 1]).

El **grupo fundamental** de un espacio topológico X basado en un punto $p \in X$, notado como $\pi_1(X,p)$, es el conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas con la operación yuxtaponer clases.

Propiedades

- Si el espacio es arco-conexo, los diferentes grupos $\pi_1(X,p)$ y $\pi_1(X,q)$ para dos puntos $p, q \in X$ son isomorfos. Siendo posible hablar de *el* grupo fundamental del espacio: $\pi_1(X)$. Este isomorfismo no es natural en general.
- Una aplicación continua $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos induce una aplicación del conjunto de lazos de X sobre el de lazos de Y. Esta aplicación se induce también sobre las clases respectivas y se convierte en un homomorfismo f_* entre los grupos fundamentales definido de este modo: $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$.
- La asignación dada por $X \to \pi_1(X)$ que va de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos es un functor.
- Este invariante puede ser calculado mediante la técnica de grafo de grupos conocida como el Teorema de Seifert-van Kampen. Con este resultado basta descomponer el espacio en 2 espacios más simples donde el grupo fundamental sea conocido.

Ejemplos

- En muchos espacios sólo existe una clase de homotopía de lazos, y en consecuencia, el grupo fundamental es trivial. Un espacio topológico con grupo fundamental trivial se dice simplemente conexo. $\mathbf{R}^n$, o cualquier subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ lo son. La esfera de dimensión n con n mayor o igual que 2 también lo es.

- El espacio topológico más simple no simplemente conexo es la circunferencia: su grupo fundamental es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros **Z**. El número entero asociado a cada lazo de S^1 es el número de vueltas que ese lazo da en torno a ella.

- Si *X* e *Y* son dos espacios topológicos arcoconexos, el grupo fundamental del producto *X* x *Y* es isomorfo al producto de los grupos de ambos espacios. Por ejemplo, si para la circunferencia, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Para el toro, homeomorfo a un producto de circunferencias, $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

- El grupo fundamental no tiene por qué ser conmutativo. Por ejemplo, el grupo fundamental del plano privado de dos puntos $\mathbb{R}^2 - \{a; b\}$ es isomorfo al grupo libre con dos generadores F_2. Estos dos generadores son las clases de los lazos que pasando por un punto p rodean a cada uno de los puntos eliminados. En algunas clases particulares de espacios topológicos, como por ejemplo en la de los grupos topológicos, el grupo fundamental sí resulta ser siempre abeliano.

Notas y referencias

1. Munkres: "Topología" ISBN 978-84-205-3180-9, printed in spain

Bibliografía

- Masey, W.S. *A basic course in algebraic topology.* GTM 127. Springer-Verlag. ISBN 0-387-97430-X
- Munkres, J., *Topology*, Prentice Hall (2000) ISBN 0131816292

- Wikimedia Commons alberga una categoría multimedia sobre **Grupo fundamental**.