WIKIPEDIA

Conjunto conexo

Un **conjunto conexo** es un subconjunto $C \subseteq X$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ (donde $\mathcal{T}$ es la colección de conjuntos abiertos del espacio topológico) que no puede ser expresado como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos de la topología.

Intuitivamente, un conjunto conexo es el que aparece como una sola *pieza*, que no se puede 'dividir' o 'partir'. En el caso de que un conjunto no sea conexo, se dice que es **disconexo**.

Formalmente

$C \subseteq X$ es un conjunto conexo si y sólo si

$\forall A, B \in \mathcal{T}, A \cap B = \emptyset, C \subseteq A \cup B$ implica $C \subseteq A \vee C \subseteq B$

Nótese que si $C = X$ y cumple lo anterior, entonces se dice que $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio topológico conexo**.

Bajo estas definiciones, se tiene que $C \subseteq X$ es conexo si y solamente si es un espacio topológico conexo para la topología traza.

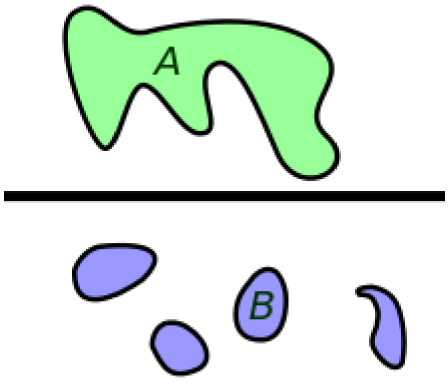
Se va a definir la **conexividad** en forma negativa: Un conjunto S se llama **conexo**, si no existe una partición del mismo en dos conjuntos no vacíos y disjuntos S_1 y S_2, ninguno de los cuales contiene puntos de acumulación del otro. Una *hoja de papel* es un conjunto conexo, al cortarla en dos partes se ve que ningún punto de una parte es punto de acumulación de la otra.

Índice

Ejemplos

Conjuntos conexos

- Las esferas $S^n, n \geq 1,$ son conexas
- Un punto en $\mathbb{R}^n$ es conexo
- Un nudo es un conjunto conexo en S^3
- Un toro es un conjunto conexo en $\mathbb{R}^3$
- En $\mathbb{R}$, un intervalo cerrado por la derecha o por la izquierda es un conjunto conexo; de igual modo un punto de la recta.
- El complementario de un punto en $\mathbb{R}^n, n \geq 2,$ es conexo
- En el plano, un polígono simple con su interior es un conjunto conexo, considerando la topología usual.



El espacio **A** es conexo.
El espacio **B** no lo es.

Conjuntos disconexos

- Cualquier conjunto finito que contiene más de un punto, sea en la recta, el plano o el espacio geométrico usual.
- El conjunto formado por todos los puntos de un número finito de conjuntos cerrados $F_1, F_2, \dots F_n$ sin puntos comunes dos a dos. Simplificando, todos los puntos de cuatro círculos, ubicados en sendos cuarteles de una región cuadrada.[1]

Subconjunto conexo en la recta

Sea $\mathbb{R}$ provisto de la topología usual T_u, además J un intervalo de $\mathbb{R}$, M y N subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que J es parte de la unión de M y N, $J \cap M \cap N = \emptyset$. Entonces $J \cap M = \emptyset \ \vee J \cap N = \emptyset$. En este caso J es un subconjunto conexo de la recta real.

- Un subconjunto H de la recta es un subconjunto conexo de la recta real cuando, y sólo cuando se trata de un único intervalo. De cualquier intervalo basta retirar un punto, lo que queda ya no es conexo, tampoco lo es el conjunto $K = \left\{\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$[2]

Conjuntos disconexos

- El complementario de un punto en $\mathbb{R}$
- El conjunto formado por la unión de dos esferas disjuntas en $\mathbb{R}^n$
- Un enlace de n componentes (nudos), $n \geq 2$
- El conjunto Q de los números racionales no es un conjunto conexo en la topología usual de $\mathbb{R}$. En efecto sea m = raíz cuadrada de tres. Los conjuntos U = (-∞, m) y V = (m, +∞) . Se tiene que Q es parte de la unión de U y V. Además la intersección de Q con U, de Q con V no es vacío; pero la intersección de U con V es = ∅, lo mismo que Q inter U inter V es vacío. Q está contenido en la unión de dos abiertos disjuntos.
- El conjunto de los irracionales Q^c no es un conjunto conexo en el espacio (R, T_u). Tomar el punto 5 y formar dos abiertos, semirrectas a la izquierda y la derecha. Y proseguir como en el caso de Q.

Propiedades de los conjuntos conexos

Se cumple que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico conexo, cualquier espacio homeomorfo a él también lo será. Esta propiedad nos da una caracterización muy útil de los conjuntos conexos: $C \subseteq X$ es un conjunto conexo si y solamente si para toda función $f: C \to \{0,1\}$ continua, se cumple que f es una función constante, donde a $\{0,1\}$ se le dota de la topología discreta.

Otra propiedad interesante de los conjuntos conexos es la siguiente: Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ es una familia de espacios topólogicos conexos (con I un conjunto de índices de cualquier cardinalidad), entonces $\left(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}\right)$ también es conexo, donde $\mathcal{T}$ es la topología producto.

Por último, si X no es conexo, es decir, si existen abiertos U, V disjuntos no vacíos tales que su unión es X, es fácil ver que cada abierto será el complemento del otro, luego serán complementos de un abierto, y por ende, serán cerrados. Es decir, serán conjuntos clopen. Por esto, otra manera de caracterizar la conexidad es decir: X será conexo si y sólo si los únicos clopen son X y el vacío (donde ambos conjuntos son siempre clopen).

Conexión por caminos

Diremos que un conjunto X es **conexo por arcos** o **arco conexo** si dados $x_1, x_2 \in X$ existe una función continua llamada **arco** $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(1) = x_2$.

La conexidad por arcos implica conexidad, pero el recíproco no es cierto en general. Un contraejemplo muy típico es el llamado peine del topólogo, $X = A \cup B$, donde $A = \{(0,1)\}$ y $B = \{(\lambda, 0) : \lambda \in (0,1]\} \cup \left\{(\frac{1}{n}, \mu) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \mu \in [0,1]\right\}$. X es conexo, pero no conexo por arcos.

Ser conexo por arcos no es una propiedad hereditaria (esto es, si un conjunto es conexo por arcos, cualquier subconjunto de este no es necesariamente conexo por arcos). Sin embargo, ser conexo por arcos es una propiedad topológica (es decir, la imagen mediante una aplicación continua de un conjunto conexo por arcos es conexa por arcos).

Componentes conexas

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama **componente conexa**, a cada uno de los conjuntos maximales conexos. Es decir un subconjunto $Y \subset X$ es un componente conexo si se cumplen estas dos condiciones:

1. $Y \subset X$ es conexo.
2. Cualquier conjunto Z que contiene propiamente a Y es disconexo.

Se cumple que los componentes conexos de X forman una partición de X. Si X es conexo, se tiene que X es su única componente conexa.

Espacios totalmente desconectados

Un espacio topológico se dice totalmente desconectado, si sus únicas componentes conexas son los conjuntos unitarios. Cada espacio discreto es totalmente desconectado, pero también hay espacios no discretos con la propiedad, por ejemplo $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con su topología usual. Asimismo hay espacios totalmente desconectados que no son numerables, por ejemplo $\mathbb{Q}'$ (irracionales, como subespacio de $\mathbb{R}$) o el conjunto ternario de Cantor[3] C.[4]

Referencias

1. Adaptación de A. Markushevich *Teoría de las funciones analíticas* tomo I Editorial Mir Moscú (1970) traducido del ruso por Emiliano APARICIO BERNARDO
2. Mansfiel: Introducción a la topología
3. «Conjunto de Cantor» (https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor) `|url=` incorrecta con autorreferencia (ayuda).
4. Rubiano O.,, Gustavo. *Topología general [un primer curso]* (https://docplayer.es/62730919-Topologia-general-un-primer-curso-g-rubiano.html). p. 246.

Enlaces externos

- Wikilibros alberga un libro o manual sobre **Espacios Métricos**. incluyendo espacios conexos (capítulo 10).