WIKIPEDIA

Complejo de cadenas

En álgebra abstracta un conjunto $\{A_i,\, \delta_i\}$ consistente en estructuras algebraicas A_i (ya sea grupos abelianos o anillos o módulos o espacios vectoriales) y δ_i morfismos (según sea la categoría), se llama **complejo de cadenas** si la construcción

$$\ldots \to A_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n-1} \to \ldots$$

satisface $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$. Esta última condición implica $\operatorname{im} \delta_{n+1} \subseteq \ker \delta_n$ para toda n. Este concepto es clave para entender lo que es la **homología**.

Índice

Notación

El símbolo $A_\bullet$ se utiliza para designar al par $\{A_i,\, \delta_i\}$.

La homología

A las estructuras cociente

$$H_n(A_\bullet) = \frac{\ker \delta_n}{\operatorname{im} \delta_{n+1}}$$

se les llama **grupos de homología** del complejo de cadenas $A_\bullet$

Esta última construcción es muy importante en la topología algebraica, pues conforma una de sus principales herramientas.

Morfismo entre cadenas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"'] & A_q \arrow[r, "\delta_q"] \arrow[d, "f_q"'] & A_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{q+1} \arrow[r, "\gamma_{q+1}"] & B_q \arrow[r, "\gamma_q"] & B_{q-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

cadeno-morfismo $f_\bullet = \{f_i\}$.

Un morfismo (de grado cero) entre dos complejos $A_\bullet = \{A_q,\, \delta_q\}$ y $B_\bullet = \{B_q,\, \gamma_q\}$ es un conjunto $f_\bullet = \{f_q\}$ de morfismos entre las estructuras algebraicas $A_q \xrightarrow{f_q} B_q$ tales que $f_q \circ \delta_{q+1} = \gamma_{q+1} \circ f_{q+1}$. Simbólicamente $f_\bullet \colon A_\bullet \to B_\bullet$ indica lo mismo.

Un morfismo de grado d corresponde a una familia de morfismos $A_q \xrightarrow{g_q} B_{q-d}$ con la misma propiedad $g_q \circ \delta_{q+1} = \gamma_{q+1} \circ g_{q+1}$

Como categoría

Desde el punto de vista de teoría de categorías tenemos la categoría de complejos de cadenas y los cadeno-morfismos. Una utilización de ésta consideración es que las principales teorías de la topología algebraica tales como la homología, cohomología y la homotopía son verdaderos functores que asignan -por ejemplo la homología- a un par topológico (X, A) una familia de grupos abelianos $\{H_n(X, A)\}$ que formarán una complejo de cadenas $\cdots \to H_i(A) \to H_i(X) \to H_i(X, A) \to H_{i-1}(A) \to \cdots$ y donde un mapeo continuo $f\colon (X, B) \to (Y, B)$ entre pares topológicos induce un conjunto de morfismos $f_{\#}\colon H_i(A) \to H_i(B)$, $f_{\#}\colon H_i(X) \to H_i(Y)$ y $f_{\#}\colon H_i(X, A) \to H_i(Y, B)$ con las propiedades suficientes para así considerarle como un cadeno-morfismo.

Referencia

Bibliografía

- Jean Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhäuser, 1989. ISBN 0-8176-3388-X, ISBN 3-7643-3388-X

Véase también

- functores
- cohomología.