ROBINSON
MATH BOWL, 2012

2 de marzo de 2012

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Sean

$$P = (555\,555\,555\,553) \cdot (666\,666\,666\,669)$$

$$Q = (555\,555\,555\,557) \cdot (666\,666\,666\,664)\,.$$

¿Cuál número es mayor P o Q? Explique.

Problem. Let

$$P = (555\,555\,555\,553) \cdot (666\,666\,666\,669)$$

$$Q = (555\,555\,555\,557) \cdot (666\,666\,666\,664)\,.$$

Which number is larger P or Q? Explain.

Mesa #		Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Sean

$$P = (555\ 555\ 555\ 553) \cdot (666\ 666\ 666\ 669)$$
$$Q = (555\ 555\ 555\ 557) \cdot (666\ 666\ 666\ 664)\,.$$

¿Cuál número es mayor P o Q? Explique.

Problem. Let

$$P = (555\ 555\ 555\ 553) \cdot (666\ 666\ 666\ 669)$$
$$Q = (555\ 555\ 555\ 557) \cdot (666\ 666\ 666\ 664)\,.$$

Which number is larger P or Q? Explain.

Solución.

Sea $A = 111\ 111\ 111\ 111$, entonces

$$P = (5A - 2) \cdot (6A + 3)$$

$$Q = (5A + 2) \cdot (6A - 2).$$

Así que,

$$P = 30A^2 + 3A - 6$$
$$Q = 30A^2 + 2A - 4.$$

Por lo tanto, $P - Q = A - 2 > 0$. Lo que implica que $P > Q$.

Por si acaso,

$$P = 370\ 370\ 370\ 369\ 962\ 962\ 962\ 957$$
$$Q = 370\ 370\ 370\ 369\ 851\ 851\ 851\ 848.$$

Así que,

$$P - Q = 111\ 111\ 111\ 109$$
$$P > Q.$$

Mesa #		Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Factorice N completamente como producto de números primos.

$$N = 55^{2009} + 55^{2010} + 55^{2011} + 55^{2012}.$$

Explique.

Problem. Factor N completely as a product of prime numbers.

$$N = 55^{2009} + 55^{2010} + 55^{2011} + 55^{2012}.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Factorice N completamente como producto de números primos.

$$N = 55^{2009} + 55^{2010} + 55^{2011} + 55^{2012}.$$

Explique.

Problem. Factor N completely as a product of prime numbers.

$$N = 55^{2009} + 55^{2010} + 55^{2011} + 55^{2012}.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned} N &= 55^{2009} + 55^{2010} + 55^{2011} + 55^{2012} \\ &= 55^{2009}\left(1 + 55^1 + 55^2 + 55^3\right) \\ &= 55^{2009}\,(169456) \\ &= 55^{2009}\left(2^4 \times 7 \times 17 \times 89\right) \\ &= 2^4 \times 5^{2009} \times 7 \times 11^{2009} \times 17 \times 89 \end{aligned}$$

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea x un entero. Verifique que si

$$L = \frac{4x + 1 - \sqrt{8x + 1}}{2}$$

es un entero, entonces es un cuadrado perfecto. Explique.

Problem. Let x be an integer. Show that if

$$L = \frac{4x + 1 - \sqrt{8x + 1}}{2}$$

is an integer, then it is a perfect square. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea x un entero. Verifique que si

$$L = \frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2}$$

es un entero, entonces es un cuadrado perfecto. Explique.

Solución.

Note que si L es un entero, entonces $\sqrt{8x+1}$ es un entero impar. A saber,

$$\begin{aligned} L = \frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} &\implies 2L = 4x+1-\sqrt{8x+1} \\ &\implies \sqrt{8x+1} = 4x-2L+1 \\ &\implies \sqrt{8x+1} = 2(2x-L)+1 \\ &\implies \sqrt{8x+1} = 2M+1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt{8x+1} = 2M+1 &\implies 8x+1 = (2M+1)^2 \\ &\implies 4x = \frac{(2M+1)^2-1}{2} \\ &\implies 4x+1 = \frac{(2M+1)^2+1}{2} \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} L &= \frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} \\ &= \frac{(2M+1)^2+1-2(2M+1)}{4} \\ &= \frac{4M^2+4M+1+1-4M-2}{4} = \frac{4M^2}{4} = M^2 \end{aligned}$$

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor exacto de

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan(x) \cdot \csc(x)?$$

Explique.

Problem. What is the exact value of

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan(x) \cdot \csc(x)?$$

Explain.

Mesa #		Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. ¿Cuál es el valor exacto de

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan(x) \cdot \csc(x)?$$

Explique.

Problem. What is the exact value of

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan(x) \cdot \csc(x)?$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan(x) \cdot \csc(x) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \tan(x) \cdot \csc(x) \\
&= -\cos(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(3x-20)+1?$$

Explique.

Problem. What is the sum of the solutions of the equation

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(3x-20)+1?$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(3x-20) + 1?$$

Explique.

Problem. What is the sum of the solutions of the equation

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(3x-20) + 1?$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
2\log_{10}(x) &= \log_{10}(3x-20)+1 \\
2\log_{10}(x) - \log_{10}(3x-20) &= 1 \\
\log_{10}(x^2) - \log_{10}(3x-20) &= 1 \\
\log_{10}\left(\frac{x^2}{3x-20}\right) &= 1 \\
\frac{x^2}{3x-20} &= 10^1 \\
x^2 &= 30x - 200 \\
x^2 - 30x + 200 &= 0 \\
(x-20)(x-10) &= 0 \\
x &= 10 \quad \text{ó} \quad 20
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de las soluciones de la ecuación es $\boxed{30.}$

Mesa # **Valor : 8 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Encuentre el valor de

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explique.

Problem. Suppose that, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Find the value of

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Suponga que, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Encuentre el valor de

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explique.

Problem. Suppose that, $\sin(u) - \cos(u) = \frac{1}{2}$. Find the value of

$$\sin^3(u) - \cos^3(u).$$

Explain.

Solución.

Note que, $(\sin(u) - \cos(u))^2 = \frac{1}{4}$. Lo que implica que,

$$\begin{aligned}
\sin^2(u) - 2\sin(u)\cos(u) + \cos^2(u) &= \frac{1}{4} \\
1 - \frac{1}{4} &= 2\sin(u)\cos(u) \\
\frac{3}{8} &= \sin(u)\cos(u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^3(u) - \cos^3(u) &= (\sin(u) - \cos(u))\left(\sin^2(u) + \sin(u)\cos(u) + \cos^2(u)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \sin(u)\cos(u)) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{8}\right) \\
&= \frac{11}{16}
\end{aligned}$$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea
$$g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$
donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Suponga que, $g(p) = \frac{1}{3}$. Encuentre el valor de $g(4p)$. Explique.

Problem. Let
$$g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$
where $a > 0$ and $a \neq 1$. Suppose that, $g(p) = \frac{1}{3}$. Find the value of $g(4p)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea
$$g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$
donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Suponga que, $g(p) = \frac{1}{3}$. Encuentre el valor de $g(4p)$. Explique.

Problem. Let
$$g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$
where $a > 0$ and $a \neq 1$. Suppose that, $g(p) = \frac{1}{3}$. Find the value of $g(4p)$. Explain.

Solución.

$$\begin{aligned} g(p) = \frac{a^p - a^{-p}}{a^p + a^{-p}} &= \frac{1}{3} \\ 3a^p - 3a^{-p} &= a^p + a^{-p} \\ 2a^p - 4a^{-p} &= 0 \\ 2a^{2p} - 4 &= 0 \\ a^{2p} &= 2 \end{aligned}$$

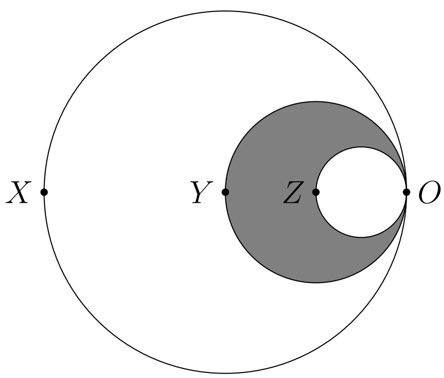
Entonces, $a^{4p} = \left(a^{2p}\right)^2 = 4$ y $a^{-4p} = \left(a^{2p}\right)^{-2} = \frac{1}{4}$. Así que,

$$\begin{aligned} g(4p) &= \frac{a^{4p} - a^{-4p}}{a^{4p} + a^{-4p}} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{4}}{4 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{16 - 1}{16 + 1} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 8 ptos.
Robinson Math Bowl, 2012	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. En la figura de abajo, tres círculos X, Y y Z son tangentes entre sí en el punto O. El centro de Y está en Z y el centro de X está en Y. Si el radio de Z es $r = \sqrt{3}$, ¿cuál es el área de la región no sombreada? Explique.

Problem. In the figure shown, three circles X, Y and Z are tangent to each other at point O. The center of Y is on Z and the center of X is on Y. If the radius of Z is $r = \sqrt{3}$, what is the area of the unshaded region? Explain.



Mesa #	Valor : 8 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 4 mins.**

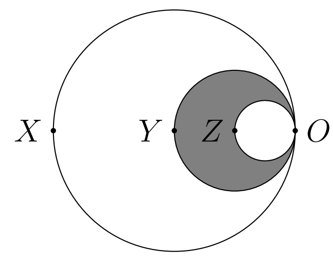
Problema. En la figura de abajo, tres círculos X, Y y Z son tangentes entre sí en el punto O. El centro de Y está en Z y el centro de X está en Y. Si el radio de Z es $r = \sqrt{3}$, ¿cuál es el área de la región no sombreada? Explique.

Problem. In the figure shown, three circles X, Y and Z are tangent to each other at point O. The center of Y is on Z and the center of X is on Y. If the radius of Z is $r = \sqrt{3}$, what is the area of the unshaded region? Explain.

Solución.

Sean (X), (Y) y (Z) las áreas de los círculos X, Y y Z respectivamente. Entonces, el área de la región no sombreada es, claramente

$$(X) - (Y) + (Z)\,.$$



El radio de Z es $r_Z = \sqrt{3}$, el radio de Y es $r_Y = 2\sqrt{3}$ y el radio de X es $r_X = 4\sqrt{3}$. Así que, el área de la región no sombreada es,

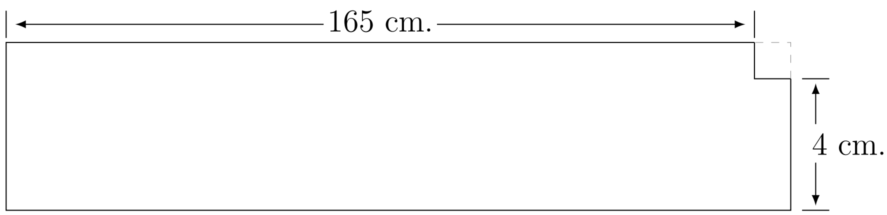
$$\begin{aligned}(X) - (Y) + (Z) &= \pi\left(4\sqrt{3}\right)^2 - \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \pi\left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 48\pi - 12\pi + 3\pi = 39\pi\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Si le removemos un cuadrado en una esquina del rectángulo ilustrado en la figura. El área de la región resultante es 2012 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área del rectángulo original? Explique.

Problem. If we remove a square at one of the corners of the rectangle shown in the figure. The area of the resulting region is 2012 square units. What is the area of the original triangle? Explain.



Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Robinson Math Bowl, 2012	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Si le removemos un cuadrado en una esquina del rectángulo ilustrado en la figura. El área de la región resultante es 2012 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área del rectángulo original? Explique.

Problem. If we remove a square at one of the corners of the rectangle shown in the figure. The area of the resulting region is 2012 square units. What is the area of the original triangle? Explain.

Solución.

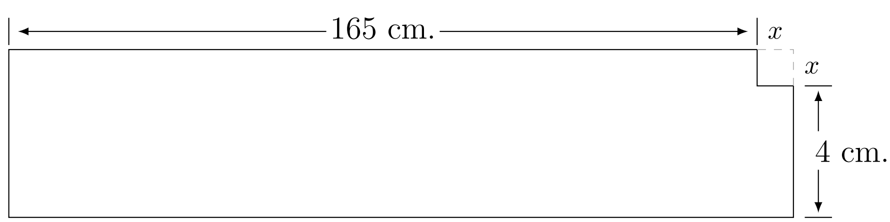
Sea x la medida del lado del cuadrado removido. Entonces por la información dada,

$$(165 + x)(4 + x) - x^2 = 2012.$$

$$660 + 169x + x^2 - x^2 = 2012.$$

$$169x = 1352.$$

$$x = 8.$$



Por lo tanto, el área del rectángulo original es

$$173 \times 12 = 2076,$$

unidades cuadradas.

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y números reales no negativos. Demuestre que,

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Explique.

Problem. Let x, y be non negative real numbers. Show that,

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Robinson Math Bowl, 2012 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sean x, y números reales no negativos. Demuestre que,

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Explique.

Solución.

Para cualquier par A, B de números reales

$$(A - B)^2 \geq 0 \implies A^2 + B^2 \geq 2AB \tag{1}$$

Si $A = x^2$ y $B = 1$ en la desigualdad (1), obtenemos

$$x^4 + 1 \geq 2x^2 \tag{2}$$

Si $A = y$ y $B = 1$ en la desigualdad (1), obtenemos

$$y^2 + 1 \geq 2y \tag{3}$$

Multiplicando (3) por $y \geq 0$,

$$y^3 + y \geq 2y^2 \tag{4}$$

Sumando (2) y (4),

$$x^4 + y^3 + y + 1 \geq 2x^2 + 2y^2 \tag{5}$$

Sumando x^2 a la desigualdad (5),

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq 3x^2 + 2y^2 \tag{6}$$

Si $A = \sqrt{3}x$ y $B = \sqrt{2}y$ en la desigualdad (1), obtenemos

$$3x^2 + 2y^2 \geq 2\left(\sqrt{3}x\right)\left(\sqrt{2}y\right) = 2\sqrt{6}xy \tag{7}$$

Finalmente, como $(2\sqrt{6})^2 = 24 > \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} = 20.25 \implies 2\sqrt{6} > \frac{9}{2}$.

Combinando (6), (7) y este último hecho,

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Mesa # | **Tiempo : 5 mins.**

Robinson Math Bowl, 2012

Problema Desempate

Problema. La sucesión infinita

$$123456789101112131415161718192021222324 25\ldots$$

se obtiene al poner a los enteros positivos en orden. ¿ Cuál es el 2012^{mo} término (o dígito) de esta sucesión? Explique.

Problem. The infinite sequence

$$123456789101112131415161718192021222324 25\ldots$$

is obtained by writing the positive integers in order. What is the 2012^{th} term (or digit) in this sequence? Explain.

Mesa #	Tiempo : 5 mins.

Robinson Math Bowl, 2012

Problema Desempate

Problema. La sucesión infinita

$$123456789101112131415161718192021222324 25\ldots$$

se obtiene al poner a los enteros positivos en orden. ¿ Cuál es el 2012^{mo} término (o dígito) de esta sucesión? Explique.

Problem. The infinite sequence

$$123456789101112131415161718192021222324 25\ldots$$

is obtained by writing the positive integers in order. What is the 2012^{th} term (or digit) in this sequence? Explain.

Solución.

Se necesitan 9 posiciones para los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Los dígitos en los números $10, 11, 12, \ldots, 99$ ocupan $2 \times 90 = 180$ posiciones. Además, los dígitos en los números $100, 101, 102, \ldots, 199$ ocupan $3 \times 100 = 300$ posiciones. Similarmente, 300 posiciones son requeridas para los números $200, 201, 202, \ldots, 299$, etcetera.

Por lo tanto, los dígitos de los enteros positivos hasta e incluyendo a 699 ocupan las primeras

$$9 + 180 + (6 \times 300) = 1989$$

posiciones. Continuando así 24 posiciones adicionales hasta el 707, la sucesión es

$$\ldots 700701702703704705706707$$

y podemos ver que el 2012^{mo} término es el "0" en 707.