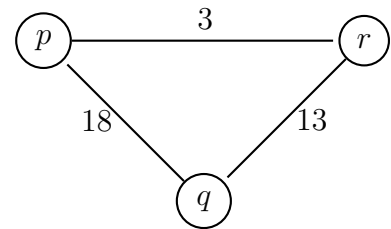
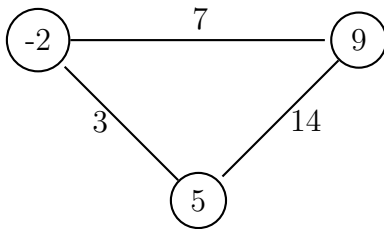

XV COPA CHAMPAGNAT DE MATEMATICAS
Superior

Iván Cardona Torres, Ph.D.

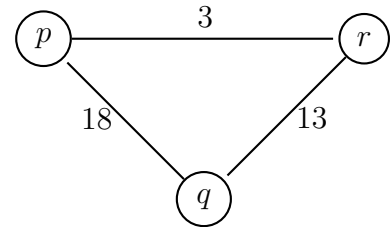
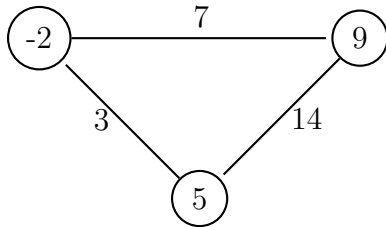
10 de abril de 2015

Problema. En cada diagrama ilustrado en este problema, el número sobre la recta que une dos círculos es la suma de los dos números en los círculos. Abajo, a la izquierda, hay un diagrama completado a manera de ejemplo. Determine los valores de p, q, r en el diagrama de la derecha. Explique.

Problem. In each diagram shown in this problem, the number on the line connecting two circles is the sum of the two numbers in these two circles. An example of a completed diagram is shown below, to the left. Determine the values of p, q, r in the diagram below, to the right. Explain.



Problema. En cada diagrama ilustrado en este problema, el número sobre la recta que une dos círculos es la suma de los dos números en los círculos. Abajo, a la izquierda, hay un diagrama completado a manera de ejemplo. Determine los valores de p, q, r en el diagrama de la derecha. Explique.



Solución.

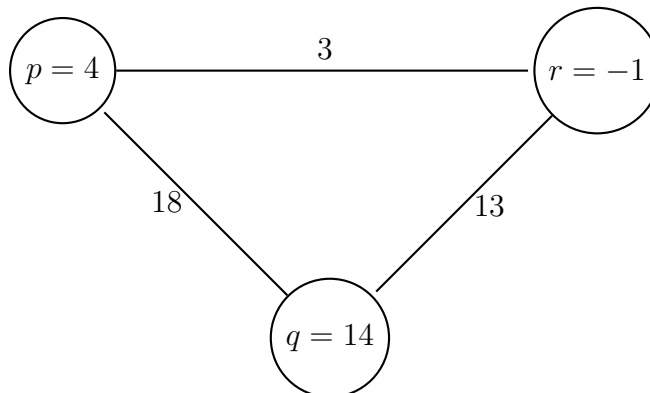
Del diagrama de la derecha obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} p + r = 3 \\ p + q = 18 \\ q + r = 13 \end{cases}$$

Si le restamos la primera ecuación a la segunda ecuación, obtenemos $q - r = 15$. Sumando esta última ecuación a la tercera ecuación del sistema, obtenemos $2q = 28$. Esto implica que $q = 14$.

En fin, la solución del sistema es

$$p = 4, \quad q = 14 \quad \text{y} \quad r = -1.$$



Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 pts.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Resuelva la ecuación para x .

$$\log_7(25 + \log_7(x)) = 6.$$

Explique.

Problem. Solve the equation for x .

$$\log_7(25 + \log_7(x)) = 6.$$

Explain.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 pts.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Resuelva la ecuación para x .

$$\log_7(25 + \log_7(x)) = 6.$$

Explique.

Problem. Solve the equation for x .

$$\log_7(25 + \log_7(x)) = 6.$$

Explain.

Solución.

$$\log_7(25 + \log_7(x)) = 6$$

$$25 + \log_7(x) = 7^6$$

$$\log_7(x) = 7^6 - 25$$

$$x = 7^{(7^6 - 25)}$$

Problema. Suponga que

$$a \star b = \sqrt{a + 4b}.$$

- (i). Encuentre el valor exacto de $9 \star (8 \star 7)$.
- (ii). Encuentre todos los valores posibles de m de modo que $m \star m = m$.

Explique.

Problem. Suppose that

$$a \star b = \sqrt{a + 4b}.$$

- (i). Find the exact value of $9 \star (8 \star 7)$.
- (ii). Find all possible values of m for which $m \star m = m$.

Explain.

Problema. Suponga que

$$a \star b = \sqrt{a + 4b}.$$

- (i). Encuentre el valor exacto de $9 \star (8 \star 7)$.
(ii). Encuentre todos los valores posibles de m de modo que $m \star m = m$.

Explique.

Solución.

(i).

$$\begin{aligned} 9 \star (8 \star 7) &= 9 \star (\sqrt{8 + 4(7)}) \\ &= 9 \star \sqrt{36} \\ &= 9 \star 6 \\ &= \sqrt{9 + 4(6)} \\ &= \sqrt{33} \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} m \star m &= m \\ \sqrt{m + 4m} &= m \\ \sqrt{5m} &= m \\ 5m &= m^2 \\ 0 &= m^2 - 5m \\ 0 &= m(m - 5) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m = 0$ ó $m = 5$.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 ptos.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Los enteros positivos (x, y, z) forman un *triple-sanjuanero* si $7x = 11y = 2z$.

(i). Determine los valores de y y z en el triple-sanjuanero $(88, y, z)$.

(ii). Demuestre que para todo triple-sanjuanero (x, y, z) , y es divisible por 14.

Explique.

Problem. The positive integers (x, y, z) form a *sanjuanero-triple* if $7x = 11y = 2z$.

(i). Determine the values of y and z in the sanjuanero-triple $(88, y, z)$.

(ii). Show that for every sanjuanero-triple (x, y, z) , y must be divisible by 14.

Explain.

Problema. Los enteros positivos (x, y, z) forman un *triple-sanjuanero* si $7x = 11y = 2z$.

- (i). Determine los valores de y y z en el triple-sanjuanero $(88, y, z)$.
- (ii). Demuestre que para todo triple-sanjuanero (x, y, z) , y es divisible por 14.

Explique.

Solución.

- (i). Suponga que $(88, y, z)$ es un triple-sanjuanero. Por definición de triple-sanjuanero,

$$7(88) = 11y \implies y = \frac{7(88)}{11} = 7(8) = 56$$

$$7(88) = 2z \implies z = \frac{7(88)}{2} = 7(44) = 308$$

En fin,

$$(88, y, z) = (88, 56, 308).$$

(ii). Suponga que (x, y, z) es un triple-sanjuanero. Como $11y = 7x$, esto implica que 7 divide a $11y$. Pero, como 7 y 11 son relativamente primos, 7 tiene que dividir a y . Análogamente, como $11y = 2z$, esto implica que 2 divide a $11y$. Pero, como 2 y 11 son relativamente primos, 2 tiene que dividir a y .

Por lo tanto, $14 = 2 \cdot 7$ divide a y .

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 pts.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Sea x un número real tal que $x^3 + 4x = 8$. Determine el valor exacto de $x^7 + 64x^2$. Explique.

Problem. Let x be a real number such that $x^3 + 4x = 8$. Determine the exact value of $x^7 + 64x^2$. Explain.

Problema. Sea x un número real tal que $x^3 + 4x = 8$. Determine el valor exacto de $x^7 + 64x^2$. Explique.

Problem. Let x be a real number such that $x^3 + 4x = 8$. Determine the exact value of $x^7 + 64x^2$. Explain.

Solución.

De la información dada, $x^{n+3} = x^n x^3 = x^n(8 - 4x) = 8x^n - 4x^{n+1}$. Esto nos permite reducir potencias de x , de modo que

$$\begin{aligned}x^7 &= 8x^4 - 4x^5 \\&= 8x^4 - 4(8x^2 - 4x^3) \\&= 8x^4 - 32x^2 + 16x^3 \\&= 8(8x^1 - 4x^2) - 32x^2 + 16x^3 \\&= 64x - 32x^2 - 32x^2 + 16x^3 \\&= 64x - 64x^2 + 16(8 - 4x) \\&= 64x - 64x^2 + 128 - 64x \\&= -64x^2 + 128\end{aligned}$$

Por lo tanto $x^7 + 64x^2 = \boxed{128}$.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 ptos.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Dos ángulos de un triángulo miden 120° y 45° , y el lado más largo mide $\sqrt{24}$. Encuentre el valor exacto de la longitud del lado más corto del triángulo. Explique.

Problem. Two angles of a triangle are 120° and 45° , and the longest side measures $\sqrt{24}$. Find the exact value of the length of the shortest side of the triangle. Explain.

Problema. Dos ángulos de un triángulo miden 120° y 45° , y el lado más largo mide $\sqrt{24}$. Encuentre el valor exacto de la longitud del lado más corto del triángulo. Explique.

Problem. Two angles of a triangle are 120° and 45° , and the longest side measures $\sqrt{24}$. Find the exact value of the length of the shortest side of the triangle. Explain.

Solución.

El ángulo que falta mide $180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$. Por la ley de senos,

$$\frac{\sin(120^\circ)}{\sqrt{24}} = \frac{\sin(15^\circ)}{c}$$

ó

$$\sin(120^\circ) \cdot c = \sqrt{24} \cdot \sin(15^\circ)$$

$$c = \frac{\sqrt{24} \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(120^\circ)}$$

Utilizando, ahora la fórmula de resta,

$$\begin{aligned} \sin(15^\circ) &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin(45^\circ) \cos(30^\circ) - \cos(45^\circ) \sin(30^\circ) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sqrt{24} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= 2\sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

Nota. Si utiliza la fórmula de medio ángulo para calcular $\sin(15^\circ)$, el valor de c puede le haya dado $2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$, que es lo mismo que el valor de c arriba.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 pts.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Si el entero de cuatro dígitos $6a2b$ es un cuadrado perfecto. Encuentre el valor de $a + b$. Explique.

Problem. If the four digit integer $6a2b$ is a perfect square. Find the value of $a + b$. Explain.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 ptos.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Si el entero de cuatro dígitos $6a2b$ es un cuadrado perfecto. Encuentre el valor de $a + b$. Explique.

Problem. If the four digit integer $6a2b$ is a perfect square. Find the value of $a + b$. Explain.

Solución.

Sea $N = 6ab9$. Note que, $70^2 = 4900$ y $90^2 = 8100$. Así que,

$$70 < \sqrt{N} < 90.$$

Examinando las posibles raíces cuadradas de N ,

$$71^2 = 5041$$

$$72^2 = 5184$$

$$73^2 = 5329$$

$$74^2 = 5476$$

$$75^2 = 5625$$

$$76^2 = 5776$$

$$77^2 = 5929$$

$$78^2 = 6084$$

$$79^2 = 6241$$

$$80^2 = 6400$$

$$81^2 = 6561$$

$$82^2 = 6724$$

$$83^2 = 6889$$

$$84^2 = 7056$$

Por lo tanto, $N = 6724$ y $a + b = 7 + 4 = 11$.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 pts.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Encuentre el valor exacto de Q si,

$$Q = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Explique.

Problem. Find the exact value of Q if,

$$Q = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Explain.

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 ptos.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Encuentre el valor exacto de Q si,

$$Q = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Explique.

Solución.

$$Q = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

$$Q = 3 + \frac{1}{Q}$$

$$Q^2 = 3Q + 1$$

$$Q^2 - 3Q - 1 = 0$$

Utilizando la cuadrática y como Q es positivo,

$$Q = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 ptos.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Suponga que,

$$\tan(A + B) = 33 \quad \text{y} \quad \text{que} \quad \tan(B) = 11.$$

Encuentre el valor de $\tan(A)$. Explique.

Problem. Suppose that,

$$\tan(A + B) = 33 \quad \text{and} \quad \text{that} \quad \tan(B) = 11.$$

Find the value of $\tan(A)$. Explain.

Problema. Suponga que,

$$\tan(A + B) = 33 \quad \text{y} \quad \text{que} \quad \tan(B) = 11.$$

Encuentre el valor de $\tan(A)$. Explique.

Solución.

Por la fórmula de suma

$$\tan(A + B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)}.$$

Sustituyendo los valores dados,

$$33 = \frac{\tan(A) + 11}{1 - \tan(A) \cdot 11}$$

$$33 - 363 \tan(A) = \tan(A) + 11$$

$$22 = 364 \tan(A)$$

$$\frac{22}{364} = \tan(A)$$

Por lo tanto,

$$\tan(A) = \frac{22}{364} = \frac{11}{182}.$$

Mesa #

XV COPA CHAMPAGNAT

Valor : 10 ptos.

Superior, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Sea

$$F(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Suponga que, $F(p) = \frac{1}{3}$. Encuentre el valor de $F(4p)$.
Explique.

Problem. Let

$$F(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$

where $a > 0$ and $a \neq 1$. Suppose that, $F(p) = \frac{1}{3}$. Find the value of $F(4p)$.
Explain.

Problema. Sea

$$F(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Suponga que, $F(p) = \frac{1}{3}$. Encuentre el valor de $F(4p)$. Explique.

Problem. Let

$$F(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}},$$

where $a > 0$ and $a \neq 1$. Suppose that, $F(p) = \frac{1}{3}$. Find the value of $F(4p)$. Explain.

Solución.

$$F(p) = \frac{a^p - a^{-p}}{a^p + a^{-p}} = \frac{1}{3}$$

$$3a^p - 3a^{-p} = a^p + a^{-p}$$

$$2a^p - 4a^{-p} = 0$$

$$2a^{2p} - 4 = 0$$

$$a^{2p} = 2$$

Entonces, $a^{4p} = (a^{2p})^2 = 4$ y $a^{-4p} = (a^{2p})^{-2} = \frac{1}{4}$. Así que,

$$\begin{aligned} F(4p) &= \frac{a^{4p} - a^{-4p}}{a^{4p} + a^{-4p}} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{4}}{4 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{16 - 1}{16 + 1} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$