Competencia
Academia San José
2011

18 de febrero de 2011

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Demuestre que entre 12 enteros positivos consecutivos hay al menos uno que es menor que la suma de sus divisores propios. (Los divisores propios de un entero positivo n son todos los enteros positivos, excepto por 1 y n, que dividen a n. Por ejemplo, los divisores propios de 14 son 2 y 7.) Explique.

Problem. Prove that among 12 consecutive positive integers there is at least one which is smaller than the sum of its proper divisors. (The proper divisors of a positive integer n are all positive integers other than 1 and n which divide n. For example, the proper divisors of 14 are 2 and 7.) Explain.

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Demuestre que entre 12 enteros positivos consecutivos hay al menos uno que es menor que la suma de sus divisores propios. (Los divisores propios de un entero positivo n son todos los enteros positivos, excepto por 1 y n, que dividen a n. Por ejemplo, los divisores propios de 14 son 2 y 7.) Explique.

Problem. Prove that among 12 consecutive positive integers there is at least one which is smaller than the sum of its proper divisors. (The proper divisors of a positive integer n are all positive integers other than 1 and n which divide n. For example, the proper divisors of 14 are 2 and 7.) Explain.

Solución.

Sean

$$N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{12}.$$

12 enteros positivos consecutivos arbitrarios. Sean

$$R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{12}.$$

los residuos, respectivamente, al dividir los 12 enteros anteriores por 12. Por ser consecutivos, uno de los residuos R_{i_0} debe ser 0. Entonces, el entero N_{i_0} tiene la forma $N_{i_0} = 12q$. Por lo tanto, entre los divisores propios de N_{i_0} se encuentran $2q, 3q, 4q$, y $6q$.

Sea $S(N_{i_0})$ la suma de los divisores propios de N_{i_0}, entonces

$$S(N_{i_0}) \geq 2q + 3q + 4q + 6q = 15q > 12q = N_{i_0},$$

que era lo que queríamos demostrar.

Mesa #	Valor : 8 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Simplifique

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5\left(\frac{1}{121}\right)}.$$

Explique.

Problem. Simplify

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5\left(\frac{1}{121}\right)}.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Simplifique

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5\left(\frac{1}{121}\right)}.$$

Explique.

Problem. Simplify

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5\left(\frac{1}{121}\right)}.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5\left(\frac{1}{121}\right)} &= \left(\left\{\sqrt{5}\right\}^{-1}\right)^{\log_5\left(\{121\}^{-1}\right)} \\
&= \left(\left\{\sqrt{5}\right\}^{-1}\right)^{(-1)\log_5(121)} \\
&= \left(\sqrt{5}\right)^{\log_5(121)} \\
&= \left(5^{1/2}\right)^{\log_5(121)} \\
&= (5)^{(1/2)\log_5(121)} \\
&= (5)^{\log_5\left(\sqrt{121}\right)} \\
&= (5)^{\log_5(11)} \\
&= 11
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $F(x) = Mx + B$, donde M y B son números reales. Dado que $F(F(F(x))) = x + 18$, ¿cuál es el valor de $M + B$? Explique.

Problem. Suppose that $F(x) = Mx + B$, where M and B are real numbers. Given that $F(F(F(x))) = x + 18$, what is the value of $M + B$? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $F(x) = Mx + B$, donde M y B son números reales. Dado que $F(F(F(x))) = x + 18$, ¿cuál es el valor de $M + B$? Explique.

Problem. Suppose that $F(x) = Mx + B$, where M and B are real numbers. Given that $F(F(F(x))) = x + 18$, what is the value of $M + B$? Explain.

Solución.

Por hipótesis,

$$F(F(x)) = F(Mx + B) = M(Mx + B) + B = M^2x + MB + B.$$

También,

$$F(F(F(x))) = M(M^2x + MB + B) + B = M^3x + M^2B + MB + B.$$

Como esto último debe ser igual a $x + 18$,

$$M^3 = 1 \quad \text{y} \quad M^2B + MB + B = B\left(M^2 + M + 1\right) = 18.$$

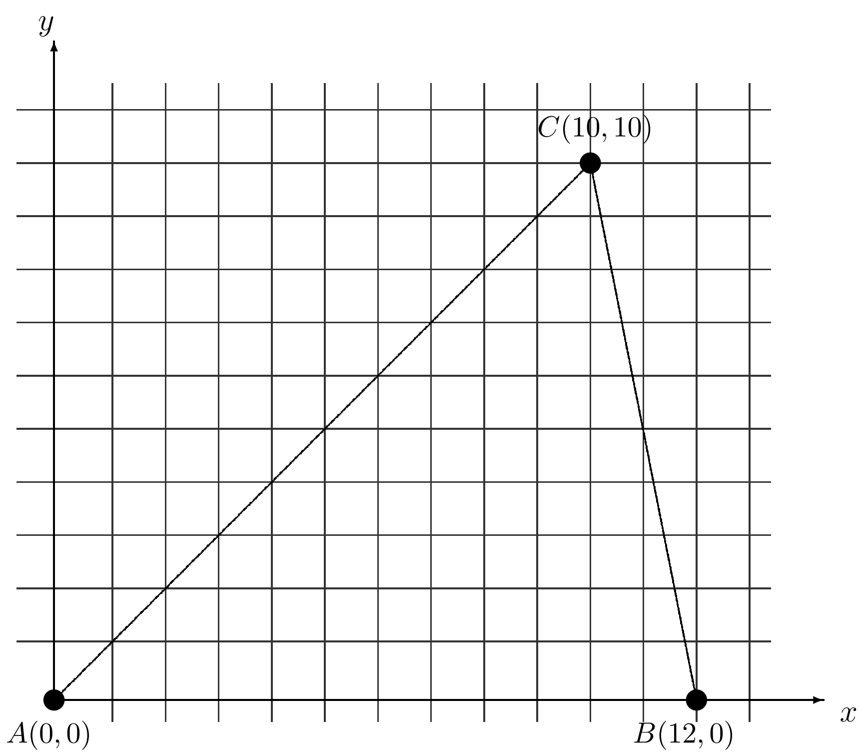
Por lo tanto, $M = 1$, $B = 18/3 = 6$ y por ende $\boxed{M + B = 7.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

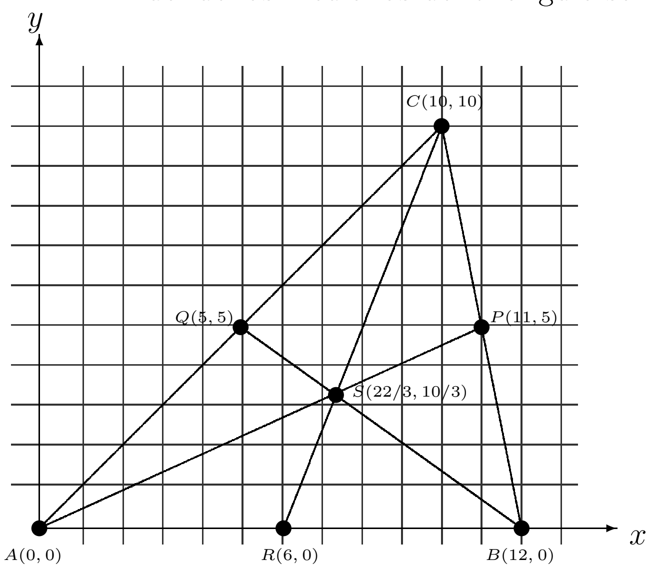
Problema. Para el triángulo $\triangle ABC$ de la figura, encuentre las coordenadas del punto donde las medianas del triángulo son concurrentes. Explique.

Problem. For the triangle $\triangle ABC$ in the figure, find the coordinates of the point where the medians of the triangle are concurrent. Explain.



Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Para el triángulo $\triangle ABC$ de la figura, encuentre las coordenadas del punto donde las medianas del triángulo son concurrentes. Explique.



Solución.
El punto medio entre B y C es $P(\frac{12+10}{2}, \frac{0+10}{2}) = P(11, 5)$. El punto medio entre A y C es $Q(\frac{0+10}{2}, \frac{0+10}{2}) = Q(5, 5)$. Es suficiente considerar el punto de intersección de las medianas $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$. La ecuación de la recta através de A y P es $y = \frac{5}{11}x$ y la ecuación de la recta a través de B y Q es $y = -\frac{5}{7}(x - 12)$. Las dos rectas se intersecan cuando

$$\begin{aligned}
\frac{5}{11}x &= -\frac{5}{7}(x - 12) \\
35x &= -55x + 660 \\
90x &= 660 \\
x &= \frac{660}{90} = \frac{22}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto S tiene coordenadas $\boxed{(22/3, 10/3)}$. Otra forma: Las tres medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos terceras partes de la distancia entre cualquier vértice y el punto medio del lado opuesto. Utilizando al vértice A y el punto medio P, obtenemos $S(x, y) = \frac{2}{3} \cdot (11, 5) = (22/3, 10/3)$.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea G el intervalo $[0,1)$. Para cada número real x, sea $f(x)$ el mayor de los enteros menores o iguales a x. Defina una operación binaria sobre G como sigue:

$$a \star b = a + b - f(a+b).$$

(i). Evalúe $\frac{5}{6} \star \frac{7}{8}$.

(ii). Encuentre un $b \in G$ de manera que $\pi \star b = 0$. Explique.

Problem. Let G be the interval $[0,1)$. For each real number x, let $f(x)$ be the greatest integer less than or equal to x. Define a binary operation on G as follows:

$$a \star b = a + b - f(a+b).$$

(i). Evaluate $\frac{5}{6} \star \frac{7}{8}$.

(ii). Find $b \in G$ such that $\pi \star b = 0$. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Academia San José, 2011	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea G el intervalo $[0, 1)$. Para cada número real x, sea $f(x)$ el mayor de los enteros menores o iguales a x. Defina una operación binaria sobre G como sigue:

$$a \star b = a + b - f(a + b).$$

(i). Evalúe $\frac{5}{6} \star \frac{7}{8}$.

(ii). Encuentre un $b \in G$ de manera que $\pi \star b = 0$. Explique.

Solución.

(i).

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \star \frac{7}{8} &= \frac{5}{6} + \frac{7}{8} - f\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\right) \\ &= \frac{20+21}{24} - f\left(\frac{20+21}{24}\right) \\ &= \frac{41}{24} - f\left(\frac{41}{24}\right) \\ &= \frac{41}{24} - 1 = \frac{17}{24} \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} \pi \star b &= 0 \\ (\pi + b) - f(\pi + b) &= 0 \\ b &= (\text{un entero}) - \pi \end{aligned}$$

Como $b \in G$, el único entero posible que podemos poner en esta última ecuación es 4. Así que, $\boxed{b = 4 - \pi}$.

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que

$$\sin(x) + \sin(y) = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{y} \quad \cos(x) + \cos(y) = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Encuentre el valor exacto de $\cos(x - y)$. Explique.

Problem. Suppose that

$$\sin(x) + \sin(y) = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{y} \quad \cos(x) + \cos(y) = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Find the exact value of $\cos(x - y)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que

$$\sin(x) + \sin(y) = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{y} \quad \cos(x) + \cos(y) = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Encuentre el valor exacto de $\cos(x - y)$. Explique.

Problem. Suppose that

$$\sin(x) + \sin(y) = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{y} \quad \cos(x) + \cos(y) = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Find the exact value of $\cos(x - y)$. Explain.

Solución.

De un lado, tenemos,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5}{7}.$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 &= (\sin(x) + \sin(y))^2 + (\cos(x) + \cos(y))^2 \\
&= (\sin^2(x) + \cos^2(x)) + (\sin^2(y) + \cos^2(y)) + 2(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)) \\
&= 1 + 1 + 2\cos(x - y) \\
&= 2 + 2\cos(x - y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
2 + 2\cos(x - y) &= \frac{5}{7} \\
2\cos(x - y) &= \frac{5}{7} - 2 = \frac{5 - 14}{7} = -\frac{9}{7} \\
\cos(x - y) &= -\frac{9}{14}
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Si el entero de cuatro dígitos $6ab9$ es un cuadrado perfecto. Encuentre el valor de $a+b$. Explique.

Problem. If the four digit integer $6ab9$ is a perfect square. Find the value of $a+b$. Explain.

Mesa #	Valor : 8 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 4 mins.**

Problema. Si el entero de cuatro dígitos $6ab9$ es un cuadrado perfecto. Encuentre el valor de $a+b$. Explique.

Problem. If the four digit integer $6ab9$ is a perfect square. Find the value of $a+b$. Explain.

Solución.

Sea $N = 6ab9$. Note que, $70^2 = 4900 \quad \text{y} \quad 90^2 = 8100$. Así que,

$$70 < \sqrt{N} < 90.$$

Examinando las posibles raíces cuadradas de N,

$$\begin{aligned}
71^2 &= 5041\\
72^2 &= 5184\\
73^2 &= 5329\\
74^2 &= 5476\\
75^2 &= 5625\\
76^2 &= 5776\\
77^2 &= 5929\\
78^2 &= 6084\\
79^2 &= 6241\\
80^2 &= 6400\\
81^2 &= 6561\\
82^2 &= 6724\\
83^2 &= 6889\\
84^2 &= 7056
\end{aligned}$$

Por lo tanto $N = 6889 \quad \text{y} \quad a+b = 16$.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Si $a+b+c=13$ y

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{3}{8}.$$

¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$? Explique.

Problem. If $a+b+c=13$ and

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{3}{8}.$$

What is the value of $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Si $a+b+c=13$ y

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{3}{8}.$$

¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$? Explique.

Problem. If $a+b+c=13$ and

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{3}{8}.$$

What is the value of $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$? Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{13-(b+c)}{b+c}+\frac{13-(c+a)}{c+a}+\frac{13-(a+b)}{a+b} \\
&= \frac{13}{b+c}-1+\frac{13}{c+a}-1+\frac{13}{a+b}-1 \\
&= 13\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]-3 \\
&= 13\left[\frac{3}{8}\right]-3 \\
&= \frac{39}{8}-\frac{24}{8} \\
&= \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 8 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Si $\log_5(7) = L$ y $\log_7(11) = M$, exprese $\log_{125}(11)$ en términos de L y M. Explique.

Problem. If $\log_5(7) = L$ and $\log_7(11) = M$, express $\log_{125}(11)$ in terms of L and M. Explain.

Mesa #	**Valor : 8 ptos.**
Academia San José, 2011	**Tiempo : 4 mins.**

Problema. Si $\log_5(7) = L$ y $\log_7(11) = M$, exprese $\log_{125}(11)$ en términos de L y M. Explique.

Problem. If $\log_5(7) = L$ and $\log_7(11) = M$, express $\log_{125}(11)$ in terms of L and M. Explain.

Solución.

Note que,

$$LM = \log_5(7) \cdot \log_7(11) = \log_5(7) \cdot \frac{\log_5(11)}{\log_5(7)} = \log_5(11).$$

Por lo tanto,

$$\log_{125}(11) = \frac{\log_5(11)}{\log_5(125)} = \frac{LM}{\log_5(5^3)} = \frac{LM}{3}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Academia San José, 2011	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dos ángulos de un triángulo miden $120°$ y $45°$, y el lado más largo mide $\sqrt{1800}$. Encuentre el valor exacto de la longitud del lado más corto del triángulo. Explique.

Problem. Two angles of a triangle are $120°$ and $45°$, and the longest side measures $\sqrt{1800}$. Find the exact value of the length of the shortest side of the triangle. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Academia San José, 2011 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dos ángulos de un triángulo miden $120°$ y $45°$, y el lado más largo mide $\sqrt{1800}$. Encuentre el valor exacto de la longitud del lado más corto del triángulo. Explique.

Problem. Two angles of a triangle are $120°$ and $45°$, and the longest side measures $\sqrt{1800}$. Find the exact value of the length of the shortest side of the triangle. Explain.

Solución.

El ángulo que falta mide $180° - (120° + 45°) = 15°$. Por la ley de senos,

$$\frac{\sin(120°)}{\sqrt{1800}} = \frac{\sin(15°)}{c}$$

ó

$$\begin{aligned}\sin(120°) \cdot c &= \sqrt{1800} \cdot \sin(15°) \\ c &= \frac{\sqrt{1800} \cdot \sin(15°)}{\sin(120°)}\end{aligned}$$

Utilizando, ahora la fórmula de resta,

$$\begin{aligned}\sin(15°) = \sin(45° - 30°) &= \sin(45°)\cos(30°) - \cos(45°)\sin(30°) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}c &= \frac{\sqrt{1800} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= 30 - 10\sqrt{3}\end{aligned}$$