# DORADO ACADEMY
# Invitational Math Competition
# 2017

January 27, 2017

**Mesa #** **Valor : 10 ptos.**

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Encuentre todos los pares de números naturales $(a, b)$ con $a \leq b$ tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}.$$

Explique.

**Problem.** Find all pairs of natural numbers $(a, b)$ with $a \leq b$ such that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}.$$

Explain.

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Encuentre todos los pares de números naturales $(a, b)$ con $a \leq b$ tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}.$$

Explique.

**Problem.** Find all pairs of natural numbers $(a, b)$ with $a \leq b$ such that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}.$$

Explain.

**Solución.**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{6} \\
\frac{b+a}{ab} &= \frac{1}{6} \\
6a + 6b &= ab \\
0 &= ab - 6a - 6b \\
36 &= ab - 6a - 6b + 36 \\
36 &= (a-6)(b-6)
\end{aligned}$$

Examinando los divisores positivos de 36 (que son nueve, a saber, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36), obtenemos la tabla siguiente:

| $(a-6)$ | $(b-6)$ |
|---|---|
| 1 | 36 |
| 2 | 18 |
| 3 | 12 |
| 4 | 9 |
| 6 | 6 |

$\Longrightarrow$

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| 7 | 42 |
| 8 | 24 |
| 9 | 18 |
| 10 | 15 |
| 12 | 12 |

Los pares de números naturales son: $\boxed{(7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), (12, 12).}$

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Encuentre el valor exacto del producto,

$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(-\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}-\sqrt{17}\right).$$

Explique.

**Problem.** Find the exact value of the product,

$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(-\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}-\sqrt{17}\right).$$

Explain.

| **Mesa #** | **Valor : 10 ptos.** |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Encuentre el valor exacto del producto,

$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(-\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}-\sqrt{17}\right).$$

Explique.

**Solución.**

Sean

$$A=\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right) \quad B=\left(-\sqrt{11}+\sqrt{13}+\sqrt{17}\right),$$
$$C=\left(\sqrt{11}-\sqrt{13}+\sqrt{17}\right) \quad D=\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}-\sqrt{17}\right).$$

Entonces $A\cdot B$ y $C\cdot D$ son diferencias de cuadrados, a saber,

$$A\cdot B=\left[\left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2-\sqrt{11}^2\right] \qquad \text{y} \qquad C\cdot D=\left[\sqrt{11}^2-\left(\sqrt{17}-\sqrt{13}\right)^2\right].$$

Así que,

$$\begin{aligned}
A\cdot B\cdot C\cdot D &= \left[\left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2-\sqrt{11}^2\right]\cdot\left[\sqrt{11}^2-\left(\sqrt{17}-\sqrt{13}\right)^2\right]\\
&= \left[13+2\sqrt{13}\sqrt{17}+17-11\right]\cdot\left[11-17+2\sqrt{13}\sqrt{17}-13\right]\\
&= \left[2\sqrt{13\cdot 17}+19\right]\cdot\left[2\sqrt{13\cdot 17}-19\right]\\
&= 4\cdot 13\cdot 17-19^2\\
&= 884-361=523
\end{aligned}$$

| Mesa # | | Valor : 10 ptos. |
|---|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Sean $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log_{225}(x) + \log_{64}(y) &= 4 \\ \log_x(225) - \log_y(64) &= 1 \end{cases}.$$

Encuentre $\log_{30}(x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2)$. Explique.

**Problem.** Let $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$ be the solutions to the system of equations

$$\begin{cases} \log_{225}(x) + \log_{64}(y) &= 4 \\ \log_x(225) - \log_y(64) &= 1 \end{cases}.$$

Find $\log_{30}(x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2)$. Explain.

| | |
|---|---|
| **Mesa #** | **Valor : 10 ptos.** |
| **Dorado Academy, 2017** | **Tiempo : 5 mins.** |

---

**Problema.** Sean $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log_{225}(x) + \log_{64}(y) &= 4 \\ \log_x(225) - \log_y(64) &= 1 \end{cases}.$$

Encuentre $\log_{30}(x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2)$. Explique.

**Solución.**

Sean

$$R = \log_{225}(x) \quad \text{y} \quad S = \log_{64}(y)$$

De la fórmula de cambio de base, obtenemos que,

$$\log_a(b) = \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}.$$

Así que el sistema es equivalente a,

$$\begin{cases} R + S &= 4 \\ \frac{1}{R} - \frac{1}{S} &= 1 \end{cases}.$$

Este sistema nos lleva a la cuadrática $R^2 - 6R + 4 = 0$. Cuyas soluciones son $R = 3 \pm \sqrt{5}$. Así que , $S = 1 \mp \sqrt{5}$. Por lo tanto,

$$\log_{225}(x_1 \cdot x_2) = \log_{225}(x_1) + \log_{225}(x_2) = \left(3 + \sqrt{5}\right) + \left(3 - \sqrt{5}\right) = 6.$$

$$\log_{64}(y_1 \cdot y_2) = \log_{64}(y_1) + \log_{64}(y_2) = \left(1 - \sqrt{5}\right) + \left(1 + \sqrt{5}\right) = 2.$$

Por lo tanto,

$$x_1 \cdot x_2 = 225^6 = 15^{12} \qquad \text{y} \qquad y_1 \cdot y_2 = 64^2 = 2^{12}.$$

Finalmente,

$$\log_{30}(x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2) = \log_{30}(x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2) = \log_{30}\left(15^{12} \cdot 2^{12}\right) = \log_{30}\left(30^{12}\right) = 12.$$

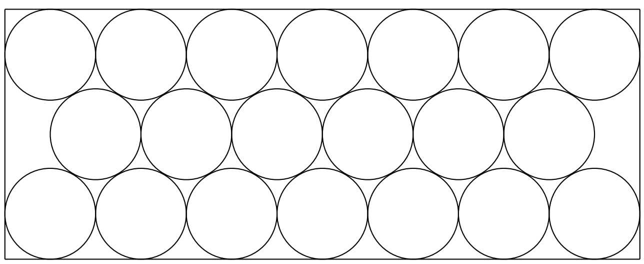
| **Mesa #** | | **Valor : 10 ptos.** |
|---|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** El diagrama muestra 20 círculos congruentes en 3 filas y dentro de un rectángulo. Los círculos son tangentes el uno al otro y a los lados del rectángulo como se ilustra. La razón del lado más largo del rectángulo al lado más corto se puede expresar de la forma $\dfrac{\sqrt{p}-q}{2}$, dónde $p$ y $q$ son enteros positivos. Encuentre $p+q$. Explique.

**Problem.** The diagram shows 20 congruent circles in 3 rows and enclosed in a rectangle. The circles are tangent to one another and to the sides of the rectangle as shown. The ratio of the longer side of the rectangle to the shorter side can be written as $\dfrac{\sqrt{p}-q}{2}$, where $p$ and $q$ are positive integers. Find $p+q$. Explain.



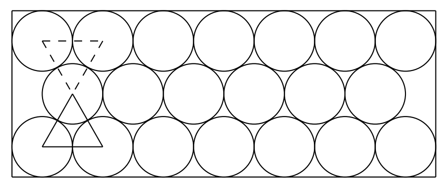
| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** El diagrama muestra 20 círculos congruentes en 3 filas y dentro de un rectángulo. Los círculos son tangentes el uno al otro y a los lados del rectángulo como se ilustra. La razón del lado más largo del rectángulo al lado más corto se puede expresar de la forma $\frac{\sqrt{p}-q}{2}$, dónde $p$ y $q$ son enteros positivos. Encuentre $p+q$. Explique.

**Solución.**



Sea $r$ el radio de los círculos. Entonces el lado más largo del rectángulo mide $14r$. Considere el triángulo equilátero formado por los centros de tres círculos adyacentes (como los ilustrados a la derecha). Este triángulo tiene lado $2r$. Sean $h$ la altura de este triángulo y $\ell$ la medida del lado más corto del rectángulo que contiene a los círculos. Por el teorema pitagórico, $h = \sqrt{3} \cdot r$ y el lado más corto del rectángulo mide

$$\ell = 2h + 2r = 2\sqrt{3}r + 2r = 2r\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Por hipótesis,

$$\begin{aligned} \frac{14r}{\ell} &= \frac{\sqrt{p}-q}{2} \\ \frac{14r}{2r\left(\sqrt{3}+1\right)} &= \frac{\sqrt{p}-q}{2} \\ \frac{7}{\left(\sqrt{3}+1\right)} &= \frac{\sqrt{p}-q}{2} \end{aligned}$$

Racionalizando,

$$\frac{7}{\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{7}{\left(\sqrt{3}+1\right)} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right] = \frac{7\sqrt{3}-7}{2}.$$

Por lo tanto,

$$7\sqrt{3} = \sqrt{p} \quad \Longrightarrow \quad p = 49 \cdot 3 = 147 \qquad \text{y} \qquad q = 7.$$

En fin, $\boxed{p+q = 147+7 = 154.}$

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Sea $F(z) = \frac{z+i}{z-i}$ para todo número complejo $z \neq i$. Defina, recursivamente, una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ como sigue: $z_0 = \frac{1}{137} + i$ y para cada natural $n \geq 1$, sea $z_n = F(z_{n-1})$. Calcule el término $z_{2017}$ de la sucesión. Explique.

**Problem.** Let $F(z) = \frac{z+i}{z-i}$ for each complex number $z \neq i$. Define, recursively, a sequence of complex numbers $\{z_n\}$ as follows: $z_0 = \frac{1}{137} + i$ and for each natural $n \geq 1$, let $z_n = F(z_{n-1})$. Compute the term $z_{2017}$ in the sequence. Explain.

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|
| **Dorado Academy, 2017** | **Tiempo : 5 mins.** |

**Problema.** Sea $F(z) = \frac{z+i}{z-i}$ para todo número complejo $z \neq i$. Defina, recursivamente, una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ como sigue: $z_0 = \frac{1}{137} + i$ y para cada natural $n \geq 1$, sea $z_n = F(z_{n-1})$. Calcule el término $z_{2017}$ de la sucesión. Explique.

**Solución.**

Afirmamos que $F^{(3)}(z) = F(F(F(z))) = z$ para todo $z \neq i$. Esto implicaría que, $z_{k+3} = F(z_{k+2}) = F(F(z_{k+1})) = F(F(F(z_k))) = z_k$ para todo $k$. Primeramente, note que $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$. Para demostrar nuestra afirmación,

$$\begin{aligned}
F(F(F(z))) &= F\left(F\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)\\
&= F\left(\frac{\frac{z+i}{z-i}+i}{\frac{z+i}{z-i}-i}\right)\\
&= F\left(\frac{(z+i)+i(z-i)}{(z+i)-i(z-i)}\right)\\
&= F\left(\frac{z+i+zi+1}{z+i-zi-1}\right)\\
&= F\left(\frac{(z+1)(1+i)}{(z-1)(1-i)}\right)\\
&= F\left(\frac{z+1}{z-1}i\right)\\
&= \frac{\frac{z+1}{z-1}i+i}{\frac{z+1}{z-1}i-i} = \frac{\frac{z+1}{z-1}+1}{\frac{z+1}{z-1}-1} = \frac{z+1+z-1}{z+1-z+1} = \frac{2z}{2} = z
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$z_{2017} = z_{3\cdot 672+1} = z_1 = F\left(z_0\right) = \frac{\left(\frac{1}{137}+i\right)+i}{\left(\frac{1}{137}+i\right)-i} = \frac{\frac{1}{137}+2i}{\frac{1}{137}} = 1+274i.$$

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Cierto conjunto finito $S$ de números reales distintos satisface las siguientes propiedades:

(i) La media de $S \cup \{1\}$ es 13 menos que la media de $S$.

(ii) La media de $S \cup \{2001\}$ es 27 más que la media de $S$.

Encuentre la media de $S$. Explique.

**Problem.** Certain finite set $S$ of distinct real numbers satisfies the following properties:

(i) The mean of $S \cup \{1\}$ is 13 less than the mean of $S$.

(ii) The mean of $S \cup \{2001\}$ is 27 more than the mean of $S$.

Find the mean of $S$. Explain.

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|
| **Dorado Academy, 2017** | **Tiempo : 5 mins.** |

**Problema.** Cierto conjunto finito $S$ de números reales distintos satisface las siguientes propiedades:

(i) La media de $S \cup \{1\}$ es 13 menos que la media de $S$.

(ii) La media de $S \cup \{2001\}$ es 27 más que la media de $S$.

Encuentre la media de $S$. Explique.

**Solución.**

Sean $\mu$ la media de $S$ y $n$ la cantidad de números reales en $S$. Entonces, por la información dada obtenemos dos ecuaciones,

$$\frac{n \cdot \mu + 1}{n+1} = \mu - 13 \qquad \text{y} \qquad \frac{n \cdot \mu + 2001}{n+1} = \mu + 27.$$

Restándole 40 a la segunda ecuación y luego utilizando la primera ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot \mu + 2001}{n+1} - 40 &= (\mu + 27) - 40 \\ \frac{n \cdot \mu + 1 + 2000}{n+1} - 40 &= \mu - 13 \\ \frac{n \cdot \mu + 1}{n+1} + \frac{2000}{n+1} - 40 &= \frac{n \cdot \mu + 1}{n+1} \\ \frac{2000}{n+1} &= 40 \end{aligned}$$

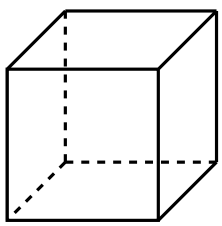
Esto implica que $n = 49$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{49 \cdot \mu + 1}{50} &= \mu - 13 \\ 49\mu + 1 &= 50\mu - 650 \\ \mu &= 651 \end{aligned}$$

| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|
| **Dorado Academy, 2017** | **Tiempo : 5 mins.** |

**Problema.** Tres de los vértices de un cubo son $P = (7, 12, 10)$, $Q = (8, 8, 1)$ y $R = (11, 3, 9)$. ¿Cuál es el área superficial del cubo? Explique.

**Problem.** Three of the vertices of a cube are $P = (7, 12, 10)$, $Q = (8, 8, 1)$ and $R = (11, 3, 9)$. What is the surface area of the cube? Explain.



| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|
| **Dorado Academy, 2017** | **Tiempo : 5 mins.** |

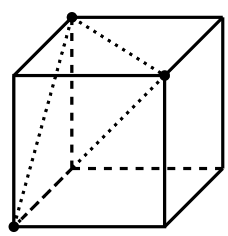
**Problema.** Tres de los vértices de un cubo son $P = (7, 12, 10)$, $Q = (8, 8, 1)$ y $R = (11, 3, 9)$. ¿Cuál es el área superficial del cubo? Explique.

**Problem.** Three of the vertices of a cube are $P = (7, 12, 10)$, $Q = (8, 8, 1)$ and $R = (11, 3, 9)$. What is the surface area of the cube? Explain.

**Solución.**

Note que,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(8-7)^2 + (8-12)^2 + (1-10)^2} = \sqrt{98} \\ PR &= \sqrt{(11-7)^2 + (3-12)^2 + (9-10)^2} = \sqrt{98} \\ QR &= \sqrt{(11-8)^2 + (3-8)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{98} \end{aligned}$$



Así que $\triangle PQR$ es un triángulo equilátero. Esto implica que todos los lados del triángulo $\triangle PQR$ son diagonales de las caras del cubo. Sea $\ell$ el lado del cubo. Entonces, por el teorema pitagórico,

$$\begin{aligned} \ell^2 + \ell^2 &= \left(\sqrt{98}\right)^2 \\ 2\ell^2 &= 98 \\ \ell^2 &= 49 \end{aligned}$$

Así que, $\ell = 7$. Por lo tanto el área superficial del cubo es $\boxed{6\ell^2 = 6 \cdot 49 = 294.}$

| **Mesa #** |
| --- |

**Valor : 10 ptos.**

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Suponga que $a, b, c$ es una progresión geométrica creciente de enteros positivos. Suponga que

$$\log_6(a) + \log_6(b) + \log_6(c) = 6,$$

y que $b - a$ es un cuadrado perfecto. Encuentre $a + b + c$. Explique.

**Problem.** Suppose that $a, b, c$ is an increasing geometric sequence of positive integers. Suppose that

$$\log_6(a) + \log_6(b) + \log_6(c) = 6,$$

and that $b - a$ is a perfect square. Find $a + b + c$. Explain.

| Mesa # | | Valor : 10 ptos. |
|---|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Suponga que $a, b, c$ es una progresión geométrica creciente de enteros positivos. Suponga que

$$\log_6(a) + \log_6(b) + \log_6(c) = 6,$$

y que $b - a$ es un cuadrado perfecto. Encuentre $a + b + c$. Explique.

**Solución.**

Como $a, b, c$ es una progresión geométrica

$$a = a, b = ar, c = ar^2,$$

dónde $r = \frac{b}{a}$ es la razón común. Dado que,

$$\log_6(a) + \log_6(b) + \log_6(c) = 6,$$

Esto implica que, $\log_6(abc) = 6$. Así que, $abc = 6^6$. Note que,

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a \cdot ar \cdot ar^2} = \sqrt[3]{a^3 r^3} = ar = b.$$

Esto es, $b$ es la media geométrica de los números $a, b, c$. Por lo tanto, $b = \sqrt[3]{abc} = 6^2 = 36$. Ahora bien, $b - a$ es un cuadrado perfecto, lo que implica que $b - a = 36 - a = m^2$ para algún entero $m$. Examinando las posibilidades:

| $m$ | $a = 36 - m^2$ |
|---|---|
| 1 | 35 |
| 2 | 32 |
| 3 | 27 |
| 4 | 20 |
| 5 | 11 |

$\Longrightarrow$

| $a$ | $b = ar$ | $r = \frac{b}{a}$ | $c = ar^2$ |
|---|---|---|---|
| 35 | 36 | $\frac{36}{35}$ | $\frac{1296}{35}$ |
| 32 | 36 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{2}$ |
| 27 | 36 | $\frac{4}{3}$ | 48 |
| 20 | 36 | $\frac{9}{5}$ | $\frac{324}{5}$ |
| 11 | 36 | $\frac{36}{11}$ | $\frac{1296}{11}$ |

La única posibilidad que nos da una progresión geométrica de enteros positivos es

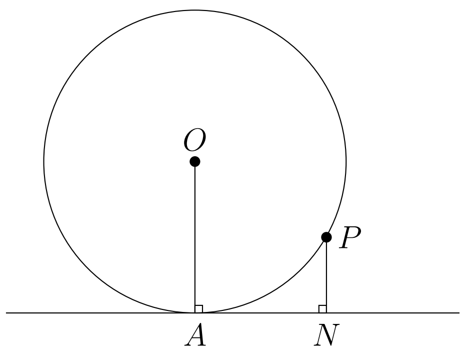
$$a = 27, b = 36, c = 48.$$

Por lo tanto, $\boxed{a + b + c = 27 + 36 + 48 = 111.}$

| | |
|---|---|
| **Mesa #** | **Valor : 10 ptos.** |
| **Dorado Academy, 2017** | **Tiempo : 5 mins.** |

**Problema.** En el diagrama, $O$ es el centro del círculo, $AN$ es tangente al círculo en $A$, $P$ está sobre el círculo y $PN$ es perpendicular a $AN$. Si $AN = 15$ y $PN = 9$, determine el radio del círculo. Explique.

**Problem.** In the diagram, $O$ is the center of the circle, $AN$ is tangent to the circle at $A$, $P$ lies on the circle, and $PN$ is perpendicular to $AN$. If $AN = 15$ and $PN = 9$, determine the radius of the circle. Explain.



| Mesa # | Valor : 10 ptos. |
|---|---|

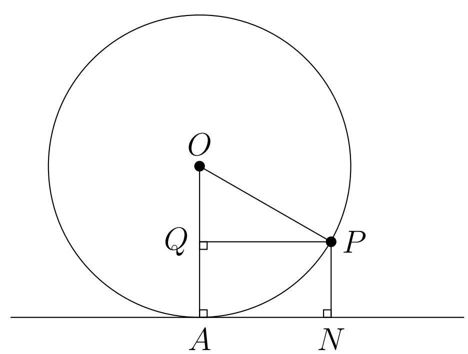
**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** En el diagrama, $O$ es el centro del círculo, $AN$ es tangente al círculo en $A$, $P$ está sobre el círculo y $PN$ es perpendicular a $AN$. Si $AN = 15$ y $PN = 9$, determine el radio del círculo. Explique.

**Problem.** In the diagram, $O$ is the center of the circle, $AN$ is tangent to the circle at $A$, $P$ lies on the circle, and $PN$ is perpendicular to $AN$. If $AN = 15$ and $PN = 9$, determine the radius of the circle. Explain.

**Solución.**




Una el centro $O$ a $P$ con un segmento de recta y dibuje una perpendicular a $OA$ a través de $P$ y $Q$. Como $OA$ y $PN$ son perpendiculares a $AN$ y $PQ$ es perpendicular a $OA$, entonces $QPNA$ es un rectángulo. Por lo tanto, $QP = AN = 15$ y $QA = PN = 9$.

Como $O$ es el centro del círculo y $A$, $P$ están en la circunferencia, entonces $OA = OP = r$. Como $OA = r$ y $QA = 9$, $OQ = r - 9$. Entonces como $\triangle OQP$ es un trángulo rectángulo con ángulo recto en $Q$, por el teorema pitagórico

$$\begin{aligned}
OP^2 &= OQ^2 + QP^2 \\
r^2 &= (r-9)^2 + 15^2 \\
r^2 &= r^2 - 18r + 81 + 225 \\
18r &= 306 \\
r &= 17
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio del círculo es 17.

| **Mesa #** | |
|---|---|

**Valor : 10 ptos.**

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Dado que

$$\tan(x) + \tan(y) = 25 \quad \text{y que} \quad \cot(x) + \cot(y) = 30.$$

Encuentre $\tan(x + y)$. Explique.

**Problem.** Given that

$$\tan(x) + \tan(y) = 25 \quad \text{and that} \quad \cot(x) + \cot(y) = 30.$$

Find $\tan(x + y)$. Explain.

| **Mesa #** | **Valor : 10 ptos.** |
|---|---|

**Dorado Academy, 2017** **Tiempo : 5 mins.**

---

**Problema.** Dado que

$$\tan(x) + \tan(y) = 25 \quad \text{y que} \quad \cot(x) + \cot(y) = 30.$$

Encuentre $\tan(x + y)$. Explique.

**Solución.**

$$\begin{aligned}
\cot(x) + \cot(y) &= 30 \\
\frac{1}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan(y)} &= 30 \\
\frac{\tan(x) + \tan(y)}{\tan(x)\tan(y)} &= 30 \\
\frac{25}{\tan(x)\tan(y)} &= 30 \\
\tan(x)\tan(y) &= \frac{25}{30} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Por la fórmula de la tangente de una suma,

$$\begin{aligned}
\tan(x + y) &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \\
&= \frac{25}{1 - \frac{5}{6}} \\
&= 150
\end{aligned}$$