DORADO ACADEMY
4^{th} Invitational Math Competition
2016

Iván Cardona Torres, Ph.D.

29 de enero de 2016

Mesa #	

Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea F_n el enésimo número en la sucesión de Fibonacci. Esto es, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$. Determine el valor de la suma

$$S = \frac{F_1}{8^1} + \frac{F_2}{8^2} + \frac{F_3}{8^3} + \cdots + \frac{F_n}{8^n} + \cdots .$$

Explique.

Problem. Let F_n be the nth number in the Fibonacci sequence. That is, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ for $n \geq 1$. Determine the value of the sum

$$S = \frac{F_1}{8^1} + \frac{F_2}{8^2} + \frac{F_3}{8^3} + \cdots + \frac{F_n}{8^n} + \cdots .$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea F_n el enésimo número en la sucesión de Fibonacci. Esto es, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$. Determine el valor de la suma

$$S = \frac{F_1}{8^1} + \frac{F_2}{8^2} + \frac{F_3}{8^3} + \cdots + \frac{F_n}{8^n} + \cdots .$$

Explique.

Solución.

Sea

$$S = \frac{F_1}{8^1} + \frac{F_2}{8^2} + \frac{F_3}{8^3} + \cdots + \frac{F_n}{8^n} + \cdots .$$

Entonces,

$$8S = F_1 + \frac{F_2}{8^1} + \frac{F_3}{8^2} + \cdots + \frac{F_n}{8^{n-1}} + \cdots .$$

Note que de la fórmula recursiva $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, obtenemos $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$ para $n \geq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
8S - S = 7S &= F_1 + \frac{F_2 - F_1}{8^1} + \frac{F_3 - F_2}{8^2} + \cdots + \frac{F_n - F_{n-1}}{8^{n-1}} + \frac{F_{n+1} - F_n}{8^n} + \cdots \\
7S &= F_1 + \frac{F_2 - F_1}{8^1} + \underbrace{\frac{F_1}{8^2} + \cdots + \frac{F_{n-2}}{8^{n-1}} + \frac{F_{n-1}}{8^n} + \cdots} \\
7S &= F_1 + \frac{F_2 - F_1}{8^1} + \frac{1}{8}\left[\frac{F_1}{8^1} + \frac{F_2}{8^2} + \frac{F_3}{8^3} + \cdots + \frac{F_n}{8^n} + \cdots\right] \\
7S &= 1 + \frac{1-1}{8} + \frac{1}{8}S \\
56S &= 8 + S \\
55S &= 8 \\
S &= \frac{8}{55}
\end{aligned}$$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre la suma de las soluciones reales de la ecuación,

$$\sqrt[4]{x} = \frac{14}{9 - \sqrt[4]{x}}.$$

Explique.

Problem. Find the sum of the real solutions of the equation,

$$\sqrt[4]{x} = \frac{14}{9 - \sqrt[4]{x}}.$$

Explain.

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre la suma de las soluciones reales de la ecuación,

$$\sqrt[4]{x} = \frac{14}{9 - \sqrt[4]{x}}.$$

Explique.

Problem. Find the sum of the real solutions of the equation,

$$\sqrt[4]{x} = \frac{14}{9 - \sqrt[4]{x}}.$$

Explain.

Solución.

Sea $u = \sqrt[4]{x}$. Entonces, la ecuación es $u = \dfrac{14}{9-u}$. Esto es equivalente a,

$$\begin{aligned} u(9-u) &= 14 \\ 0 &= u^2 - 9u + 14 \\ 0 &= (u-2)(u-7) \end{aligned}$$

Así que, $u = 2, 7$. Como $x = u^4$, obtenemos que $x = 2^4, 7^4$. Por lo tanto, la suma de las soluciones reales de la ecuación es

$$2^4 + 7^4 = 16 + 2401 = 2417.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que,

$$\tan(A) + \tan(B) = 25 \qquad \text{y} \qquad \cot(A) + \cot(B) = 30.$$

Encuentre el valor de $\tan(A + B)$. Explique.

Problem. Given that,

$$\tan(A) + \tan(B) = 25 \qquad \text{and} \qquad \cot(A) + \cot(B) = 30.$$

Find the value of $\tan(A + B)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Dado que,

$$\tan(A) + \tan(B) = 25 \qquad \text{y} \qquad \cot(A) + \cot(B) = 30.$$

Encuentre el valor de $\tan(A + B)$. Explique.

Problem. Given that,

$$\tan(A) + \tan(B) = 25 \qquad \text{and} \qquad \cot(A) + \cot(B) = 30.$$

Find the value of $\tan(A + B)$. Explain.

Solución.

$$\cot(A) + \cot(B) = \frac{1}{\tan(A)} + \frac{1}{\tan(B)} = \frac{\tan(B) + \tan(A)}{\tan(A) \cdot \tan(B)} = 30.$$

Así que,

$$\tan(A) \cdot \tan(B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Utilizando la fórmula de suma de la tangente,

$$\tan(A + B) = \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A) \cdot \tan(B)} = \frac{25}{1 - \frac{5}{6}} = 150.$$

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**
Dorado Academy, 2016		**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que α está en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y que

$$\log_{24\sin(\alpha)}\left(24\cos(\alpha)\right) = \frac{3}{2}.$$

Encuentre el valor de $24\cot^2(\alpha)$. Explique.

Problem. Suppose that α is in the interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and that

$$\log_{24\sin(\alpha)}\left(24\cos(\alpha)\right) = \frac{3}{2}.$$

Find the value of $24\cot^2(\alpha)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que α está en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y que

$$\log_{24\sin(\alpha)}\left(24\cos(\alpha)\right) = \frac{3}{2}.$$

Encuentre el valor de $24\cot^2(\alpha)$. Explique.

Solución.

Cambiando la ecuación en forma exponencial,

$$\begin{aligned}
\sqrt{24^3\sin^3(\alpha)} &= 24\cos(\alpha) \\
24\sin^3(\alpha) &= \cos^2(\alpha) \\
24\sin^3(\alpha) &= 1-\sin^2(\alpha) \\
24\sin^3(\alpha)+\sin^2(\alpha)-1 &= 0
\end{aligned}$$

Sea $u = \sin(\alpha)$. La ecuación es equivalente a,

$$\begin{aligned}
24u^3+u^2-1 &= 0 \\
(3u-1)(8u^2+3u+1) &= 0
\end{aligned}$$

La única solución real es $u = \frac{1}{3}$, o sea $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$. Utilizando la identidad fundamental de la trigonometría y el hecho de que α está en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\alpha) = +\sqrt{\frac{8}{9}}$. Por lo tanto,

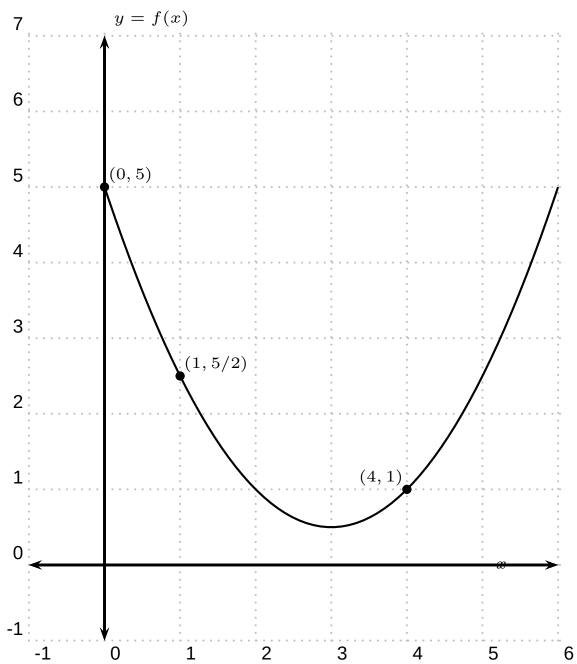
$$24\cot^2(\alpha) = 24\cdot\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = 24\left(\frac{8/9}{1/9}\right) = 24(8) = 192.$$

Mesa #		Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere la parábola de la figura. Determine los valores de a, b y c de modo que la gráfica de $f(x) = ax^2+bx+c$ sea como la ilustrada en la figura. Explique.

Problem. Consider the parabola in the figure. Determine the values of a, b and c such that the graph of $f(x) = ax^2 + bx + c$ is as illustrated in the figure. Explain.



Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

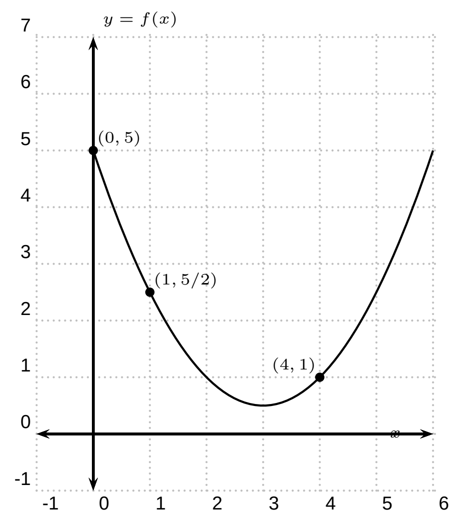
Problema. Considere la parábola de la figura. Determine los valores de a, b y c de modo que la gráfica de $f(x) = ax^2+bx+c$ sea como la ilustrada en la figura. Explique.

Problem. Consider the parabola in the figure. Determine the values of a, b and c such that the graph of $f(x) = ax^2 + bx + c$ is as illustrated in the figure. Explain.

Solución.

Considere la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$.
De la información dada tenemos que,

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ f(1) &= \frac{5}{2} \\ f(4) &= 1 \end{aligned}$$



De la primera ecuación obtenemos que $\boxed{c = 5.}$ De la segunda ecuación, $a + b + c = a + b + 5 = 5/2$ ó

$$\boxed{a + b = -\tfrac{5}{2}.}$$

Utilizando, ahora la tercera ecuación $16a + 4b + c = 16a + 4b + 5 = 1.$ ó

$$\boxed{16a + 4b = -4.}$$

Finalmente, resolviendo el sistema

$$\boxed{a = \tfrac{1}{2}} \qquad \boxed{b = -3} \qquad \text{y} \qquad \boxed{c = 5.}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Los decimales periódicos $M = 0.abab\overline{ab}$ y $N = 0.abcabc\overline{abc}$, donde a, b, c son dígitos (no necesariamente distintos), satisfacen:

$$M + N = \frac{33}{37}.$$

Encuentre el valor del número de tres dígitos abc. Explique.

Problem. The periodic decimals $M = 0.abab\overline{ab}$ and $N = 0.abcabc\overline{abc}$, where a, b, c are digits (not necessarily distinct), satisfy:

$$M + N = \frac{33}{37}.$$

Find the value of the three digit number abc. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Los decimales periódicos $M = 0.abab\overline{ab}$ y $N = 0.abcabc\overline{abc}$, donde a, b, c son dígitos (no necesariamente distintos), satisfacen:

$$M + N = \frac{33}{37}.$$

Encuentre el valor del número de tres dígitos abc. Explique.

Solución.

Note que M y N se pueden escribir de la forma,

$$M = 0.\overline{ab} = \frac{10a + b}{99} \quad \text{y} \quad N = 0.\overline{abc} = \frac{100a + 10b + c}{999}.$$

Sea $u = 10a + b$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{u}{99} + \frac{10u + c}{999} &= \frac{33}{37} \\
\frac{u}{11} + \frac{10u + c}{111} &= \frac{9 \cdot 33}{37} \\
\frac{221u + 11c}{11 \cdot 111} &= \frac{9 \cdot 33}{37} \\
221u + 11c &= \frac{9 \cdot 33 \cdot 11 \cdot 111}{37} \\
221u + 11c &= 9 \cdot 33^2
\end{aligned}$$

Despejando para c,

$$\begin{aligned}
c &= 3 \cdot 9 \cdot 33 - \frac{221u}{11} \\
c &= 891 - \frac{221u}{11}
\end{aligned}$$

Como c es un entero (es uno de los dígitos), u debe ser un múltiplo de 11 (ya que 221 no lo es). De todos los múltiplos de 11, $\{11, 22, 33, 44, 55, \dots\}$ el único que da lugar a un número de un solo dígito es 44. Así que $c = 891 - \frac{221 \cdot 44}{11} = 7$ y por ende $\boxed{abc = 10u + c = 447.}$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La ecuación

$$2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1,$$

tiene tres raíces reales x_1, x_2, x_3, Dado que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{p}{q}$, encuentre $p + q$. Explique.

Problem. The equation

$$2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1,$$

has three real roots x_1, x_2, x_3, Given that $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{p}{q}$, find $p + q$. Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. La ecuación

$$2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1,$$

tiene tres raíces reales x_1, x_2, x_3, Dado que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{p}{q}$, encuentre $p + q$. Explique.

Problem. The equation

$$2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1,$$

has three real roots x_1, x_2, x_3, Given that $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{p}{q}$, find $p + q$. Explain.

Solución.

Sea $y = 2^{111x}$. Entonces la ecuación es,

$$\frac{1}{4}y^3 + 4y = 2y^2 + 1$$

$$y^3 - 8y^2 + 16y - 4 = 0.$$

Si r_1, r_2, r_3 son las raíces de esta última ecuación, entonces, por la fórmula de Vieta,

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 4.$$

Como $y = 2^{111x}$ y x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación original,

$$2^{111x_1} \cdot 2^{111x_2} \cdot 2^{111x_3} = 4.$$

Tomando logaritmos (base 2), obtenemos

$$\begin{aligned} 111(x_1 + x_2 + x_3) &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{2}{111} \end{aligned}$$

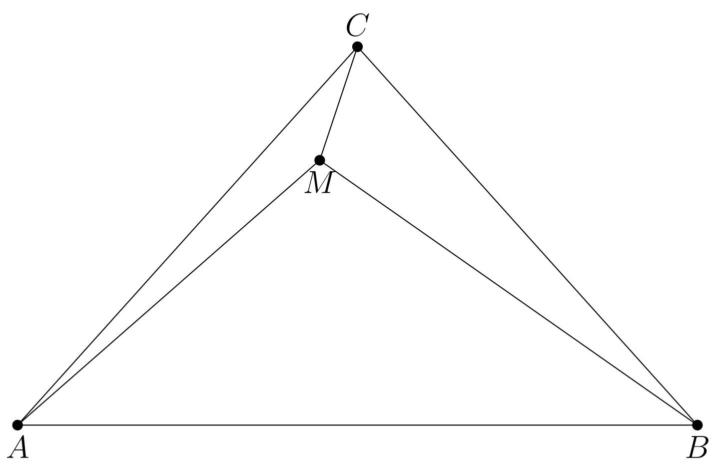
Por lo tanto, $\boxed{p + q = 2 + 111 = 113.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles con $AC = BC = 1$ y $\angle ACB = 106°$. El punto M está en el interior del triángulo tal que $\angle MAC = 7°$ y $\angle MCA = 23°$. Encuentre la medida en grados de $\angle CMB$. Explique.

Problem. Triangle $\triangle ABC$ is isosceles with $AC = BC = 1$ and $\angle ACB = 106°$. Point M is in the interior of the triangle so that $\angle MAC = 7°$ and $\angle MCA = 23°$. Find the measure in degrees of $\angle CMB$. Explain.



Mesa #	Valor : 10 ptos.

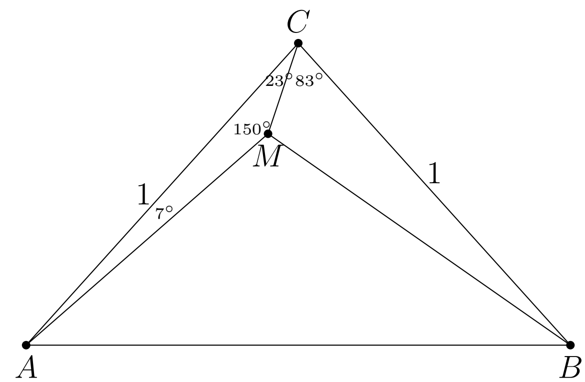
Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles con $AC = BC = 1$ y $\angle ACB = 106°$. El punto M está en el interior del triángulo tal que $\angle MAC = 7°$ y $\angle MCA = 23°$. Encuentre la medida en grados de $\angle CMB$. Explique.

Problem. Triangle $\triangle ABC$ is isosceles with $AC = BC = 1$ and $\angle ACB = 106°$. Point M is in the interior of the triangle so that $\angle MAC = 7°$ and $\angle MCA = 23°$. Find the measure in degrees of $\angle CMB$. Explain.

Solución.

Aplicando la ley de senos al triángulo $\triangle AMC$,



$$\frac{1}{\sin(150°)} = \frac{MC}{\sin(7°)}.$$

Ahora,

$$\sin(150°) = \sin(30°) = 1/2.$$

Por lo tanto,

$$MC = 2\sin(7°).$$

Aplicando la ley de cosenos al triángulo $\triangle MCB$,

$$MB^2 = 4\sin^2(7°) + 1 - 4\sin(7°)\cos(83°).$$

Como $\cos(83°) = \sin(7°)$, $MB^2 = 1$. Así que, $\triangle MCB$ es isósceles y por ende $\boxed{\angle CMB = 83°.}$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016

Tiempo : 5 mins.

Problema. Sea

$$x = \frac{6}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt[4]{7}+1\right)\left(\sqrt[8]{7}+1\right)\left(\sqrt[16]{7}+1\right)}.$$

Encuentre $(x+1)^{32}$. Explique.

Problem. Let

$$x = \frac{6}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt[4]{7}+1\right)\left(\sqrt[8]{7}+1\right)\left(\sqrt[16]{7}+1\right)}.$$

Find $(x+1)^{32}$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2016	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea

$$x = \frac{6}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt[4]{7}+1\right)\left(\sqrt[8]{7}+1\right)\left(\sqrt[16]{7}+1\right)}.$$

Encuentre $(x+1)^{32}$. Explique.

Solución.

Note que en general, para n entero positivo,

$$\left(\sqrt[2^n]{7}+1\right)\left(\sqrt[2^n]{7}-1\right) = \left(\sqrt[2^{n-1}]{7}-1\right).$$

Multiplicando el numerador y el denominador de x por $\left(\sqrt[16]{7}-1\right)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{6\cdot\left(\sqrt[16]{7}-1\right)}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt[4]{7}+1\right)\left(\sqrt[8]{7}+1\right)\underbrace{\left(\sqrt[16]{7}+1\right)\cdot\left(\sqrt[16]{7}-1\right)}_{\left(\sqrt[8]{7}-1\right)}} \\
&= \cdots \\
&= \frac{6\cdot\left(\sqrt[16]{7}-1\right)}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)} \\
&= \frac{6\cdot\left(\sqrt[16]{7}-1\right)}{6} = \sqrt[16]{7}-1
\end{aligned}$$

Así que,

$$(x+1)^{32} = \left(\sqrt[16]{7}\right)^{32} = 7^2 = 49.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El dominio de la función $F(x) = \arccos(\log_m(nx))$ es un intervalo cerrado de longitud $\frac{1}{2016}$, donde m y n son enteros positivos y $m > 1$. Encuentre el valor mínimo posible para la suma $m + n$. Explique.

Problem. The domain of the function $F(x) = \arccos(\log_m(nx))$ is a closed interval of length $\frac{1}{2016}$, where m and n are positive integers and $m > 1$. Find the smallest possible sum $m + n$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2016 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El dominio de la función $F(x) = \arccos(\log_m(nx))$ es un intervalo cerrado de longitud $\frac{1}{2016}$, donde m y n son enteros positivos y $m > 1$. Encuentre el valor mínimo posible para la suma $m + n$. Explique.

Problem. The domain of the function $F(x) = \arccos(\log_m(nx))$ is a closed interval of length $\frac{1}{2016}$, where m and n are positive integers and $m > 1$. Find the smallest possible sum $m + n$. Explain.

Solución.

El dominio de la función $\arccos(u)$ es $[-1, 1]$, así que $-1 \leq \log_m(nx) \leq 1$. Como $m > 1$, la función exponencial m^u es creciente, por ende

$$\frac{1}{m} \leq nx \leq m$$

$$\frac{1}{mn} \leq x \leq \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{1}{2016}$$

$$n = 2016m - \frac{2016}{m}$$

Para que n sea un entero, $m > 1$ tiene que dividir a 2016. Para minimizar n, m debe ser lo más pequeño posible porque aumentar m hace que $\frac{2016}{m}$ decrezca, que es la cantidad que se está restando, y hace que $2016m$ aumente, que es la cantidad que se está sumando; minimizando m nos minimiza la n y esto claramente minimiza la suma $m + n$.

Si m es igual a 2, el factor más pequeño de 2016 que no es 1, obtenemos que $n = 2016 * 2 - \frac{2016}{2} = 4032 - 1008 = 3024$

Por lo tanto el valor mínimo posible para la suma es, $\boxed{m + n = 2 + 3024 = 3026.}$