DORADO ACADEMY MATH BOWL, 2015

Iván Cardona Torres, Ph.D.

30 de enero de 2015

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre A, B, C tal que

$$\frac{8x^2 - 3x - 11}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

para todo número real x. Explique.

Problem. Find A, B, C such that

$$\frac{8x^2 - 3x - 11}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

for all real numbers x. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre A, B, C tal que

$$\frac{8x^2 - 3x - 11}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1},$$

para todo número real x. Explique.

Problem. Find A, B, C such that

$$\frac{8x^2 - 3x - 11}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1},$$

for all real numbers x. Explain.

Solución.

Multiplicando por $(x-2)(x^2+1)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
8x^2 - 3x - 11 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2) \\
8x^2 - 3x - 11 &= Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C \\
8x^2 - 3x - 11 &= (A+B)\,x^2 + (-2B+C)\,x + (A-2C)
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos el sistema,

$$\left\{\begin{aligned} A + B &= 8 \\ -2B + C &= -3 \\ A - 2C &= -11 \end{aligned}\right.$$

De la segunda ecuación, obtenemos $C = 2B - 3$. Sustituyendo esto último en la tercera ecuación, luego de simplificar, obtenemos $A - 4B = -17$. Ahora, si le restamos esta última ecuación a la primera ecuación, obtenemos $5B = 25$. En fin, la solución del sistema es

$$A = 3, \quad B = 5 \quad \text{y} \quad C = 7.$$

Mesa # **Valor : 10 ptos.**

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto de M, si

$$M = 2^{\log_{2015}(8)} - 8^{\log_{2015}(2)} + 7.$$

Explique.

Problem. Find the exact value of M, if

$$M = 2^{\log_{2015}(8)} - 8^{\log_{2015}(2)} + 7.$$

Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el valor exacto de M, si

$$M = 2^{\log_{2015}(8)} - 8^{\log_{2015}(2)} + 7.$$

Explique.

Problem. Find the exact value of M, if

$$M = 2^{\log_{2015}(8)} - 8^{\log_{2015}(2)} + 7.$$

Explain.

Solución.

Sea $u = \log_{2015}(2)$, entonces

$$\log_{2015}(8) = \log_{2015}(2^3) = 3\log_{2015}(2) = 3u.$$

Así que,

$$\begin{aligned} M &= 2^{\log_{2015}(8)} - 8^{\log_{2015}(2)} + 7 \\ &= 2^{3u} - 8^u + 7 \\ &= 2^{3u} - \left(2^3\right)^u + 7 \\ &= 2^{3u} - 2^{3u} + 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Mesa #

Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015

Tiempo : 5 mins.

Problema. Encuentre el número racional $Q > 0$ que satisface,

$$\log_7(\log_4(\log_Q(0.0081))) = 0.$$

Explique.

Problem. Find the rational number $Q > 0$ that satisfies,

$$\log_7(\log_4(\log_Q(0.0081))) = 0.$$

Explain.

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre el número racional $Q > 0$ que satisface,

$$\log_7(\log_4(\log_Q(0.0081))) = 0.$$

Explique.

Problem. Find the rational number $Q > 0$ that satisfies,

$$\log_7(\log_4(\log_Q(0.0081))) = 0.$$

Explain.

Solución.

$$\begin{aligned}
\log_7(\log_4(\log_Q(0.0081))) &= 0 \\
\log_4(\log_Q(0.0081)) &= 7^0 = 1 \\
\log_Q(0.0081) &= 4^1 \\
Q^4 &= 0.0081 = \frac{81}{10000} = \frac{3^4}{10^4} \\
Q &= \sqrt[4]{\frac{3^4}{10^4}} = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. El polinomio $P(x) = x^3 - 13x^2 - 25x + 325$ tiene tres raíces reales distintas. Si una de las raíces es el inverso aditivo de otra de las raíces, encuentre todas las raíces del polinomio $P(x)$. Explique.

Problem. The polynomial $P(x) = x^3 - 13x^2 - 25x + 325$ has three distinct roots. If one of the roots is the additive inverse of another root, find all the roots of the polynomial $P(x)$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. El polinomio $P(x) = x^3 - 13x^2 - 25x + 325$ tiene tres raíces reales distintas. Si una de las raíces es el inverso aditivo de otra de las raíces, encuentre todas las raíces del polinomio $P(x)$. Explique.

Problem. The polynomial $P(x) = x^3 - 13x^2 - 25x + 325$ has three distinct roots. If one of the roots is the additive inverse of another root, find all the roots of the polynomial $P(x)$. Explain.

Solución.

Sean $\{a, b, c\}$ las raíces de $P(x)$. Entonces, podemos asumir sin perder generalidad, que las raíces son $\{a, -a, c\}$. De aquí que,

$$\begin{aligned} x^3 - 13x^2 - 25x + 325 &= (x-a)(x+a)(x-c) \\ &= \left(x^2 - a^2\right)(x-c) \\ &= x^3 - cx^2 - a^2x + a^2c \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos que $c = 13$ y $a^2 = 25$. Las raíces son

$$\{a, b, c\} = \{-5, 5, 13\}.$$

Mesa #		Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $\omega = a + bi$ es un número complejo tal que $\omega^2 = \omega - 1$. Encuentre el valor exacto de ω^{99}. Explique.

Problem. Suppose that $\omega = a + bi$ is a complex number such that $\omega^2 = \omega - 1$. Find the exact value of ω^{99}. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que $\omega = a + bi$ es un número complejo tal que $\omega^2 = \omega - 1$. Encuentre el valor exacto de ω^{99}. Explique.

Problem. Suppose that $\omega = a + bi$ is a complex number such that $\omega^2 = \omega - 1$. Find the exact value of ω^{99}. Explain.

Solución.

Note que,

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \omega^2 \cdot \omega \\ &= (\omega - 1) \cdot \omega \\ &= \omega^2 - \omega \\ &= (\omega - 1) - \omega \\ &= -1 \end{aligned}$$

Así que,

$$\omega^{99} = \left(\omega^3\right)^{33} = (-1)^{33} = -1.$$

Otra forma de hacerlo, ω satisface la cuadrática $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, cuya solución es $\omega = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. De modo que,

$$\omega^3 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 1\left(\sqrt{3}i\right)^2 + \left(\sqrt{3}i\right)^3\right) = -1.$$

ó

$$\omega^3 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{3}i\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 1\left(\sqrt{3}i\right)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^3\right) = -1.$$

En cualquier caso, como arriba, $\boxed{\omega^{99} = -1.}$

Mesa #		**Valor : 10 ptos.**

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea Q el punto en el círculo dado por $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 29 = 0$ que está más distante del punto $P(-1, -6)$. Encuentre las distancia entre P y Q. Explique.

Problem. Let Q be the point on the circle given by $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 29 = 0$ which is furthest from the point $P(-1, -6)$. Find the distance between P and Q. Explain.

Mesa #	

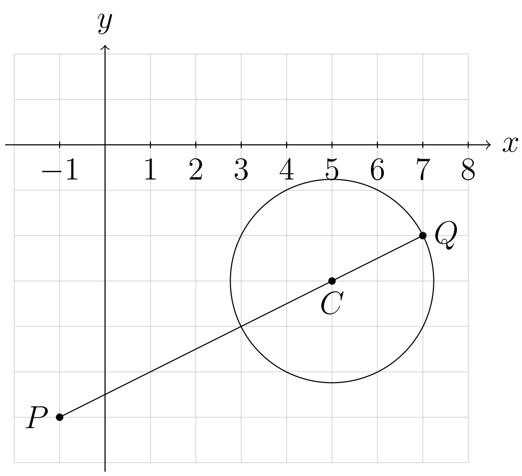
Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Sea Q el punto en el círculo dado por $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 29 = 0$ que está más distante del punto $P(-1, -6)$. Encuentre las distancia entre P y Q. Explique.

Problem. Let Q be the point on the circle given by $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 29 = 0$ which is furthest from the point $P(-1, -6)$. Find the distance between P and Q. Explain.

Solución.



Completando cuadrados, obtenemos

$$x^2 - 10x + y^2 + 6y + 29 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = -29 + 25 + 9 = 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 5.$$

Esta es la ecuación de un círculo centrado en $C(5, -3)$ de radio $\sqrt{5}$. Vea la figura. La distancia de P a Q incluye la distancia de P a C más un radio del círculo. Así que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(P, Q) &= \operatorname{dist}(P, C) + \operatorname{dist}(C, Q) \\
&= \sqrt{(5-(-1))^2 + (-3-(-6))^2} + \sqrt{5} \\
&= \sqrt{6^2 + 3^2} + \sqrt{5} \\
&= \sqrt{45} + \sqrt{5} \\
&= 4\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo, utilizando técnicas del cálculo se puede demostrar que el máximo de las distancias entre P y puntos (x, y) del círculo se alcanza cuando $x = 7$. Así que el punto Q arriba es precisamente el punto $Q(7, -2)$. En fin que, nuevamente,

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sqrt{(7-(-1))^2 + (-2-(-6))^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre la suma de todos los enteros positivos n para los cuáles $2015 + n^2$ es un cuadrado perfecto. Explique.

Problem. Find the sum of all positive integers n for which $2015 + n^2$ is a perfect square. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Encuentre la suma de todos los enteros positivos n para los cuáles $2015 + n^2$ es un cuadrado perfecto. Explique.

Problem. Find the sum of all positive integers n for which $2015 + n^2$ is a perfect square. Explain.

Solución.

Note que $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ tiene 8 divisores, a saber $1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015$. Suponga que n es un entero positivo para el cuál $2015 + n^2 = k^2$, donde k es un entero positivo (sin perder generalidad, podemos asumir que k también es positivo). Entonces

$$k^2 - n^2 = (k - n)(k + n) = 2015.$$

Examinando todas las posibilidades para $k - n$, que es divisor de 2015, obtenemos

$k-n$	$k+n$	$2n$	n	k
1	2015	2014	1007	1008
5	403	398	199	204
13	155	142	71	84
31	65	34	17	48
65	31	-34	n/a	n/a
155	13	-142	n/a	n/a
403	5	-398	n/a	n/a
2015	1	-2014	n/a	n/a

Los enteros n son $\{1007, 199, 71, 17\}$ y su suma es $\boxed{S = 1007 + 199 + 71 + 17 = 1294.}$

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que,

$$0.844 < \log_{10}(7) < 0.846.$$

¿Cuántos dígitos tiene el número $N = 7^{80}$? Explique.

Problem. Suppose that,

$$0.844 < \log_{10}(7) < 0.846.$$

How many digits are in the number $N = 7^{80}$? Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.

Dorado Academy, 2015 **Tiempo : 5 mins.**

Problema. Suponga que,

$$0.844 < \log_{10}(7) < 0.846.$$

¿Cuántos dígitos tiene el número $N = 7^{80}$? Explique.

Problem. Suppose that,

$$0.844 < \log_{10}(7) < 0.846.$$

How many digits are in the number $N = 7^{80}$? Explain.

Solución.

Note que el número 10^n es el primer entero con $n+1$ dígitos.

$$\begin{aligned}
0.844 < \log_{10}(7) < 0.846 \quad &\iff \quad 10^{.844} < 7 < 10^{.846} \\
&\iff \quad \left(10^{.844}\right)^{80} < 7^{80} < \left(10^{.846}\right)^{80} \\
&\iff \quad 10^{\frac{844}{1000}\cdot 80} < 7^{80} < 10^{\frac{846}{1000}\cdot 80} \\
&\iff \quad 10^{\frac{1688}{25}} < 7^{80} < 10^{\frac{1692}{25}} \\
&\iff \quad 10^{67.52} < 7^{80} < 10^{67.68}
\end{aligned}$$

Esto último implica que,

$$10^{67} < N = 7^{80} < 10^{68}.$$

Por lo tanto, $\boxed{N = 7^{80} \text{ tiene 68 dígitos.}}$

El cómputo no es tan importante, pero de hecho,

$N = 40\,536\,215\,597\,144\,386\,832\,065\,866\,109\,016\,673\,800\,875\,222\,251\,012\,083\,746\,192\,454\,448\,001.$

Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$. Esto es, considere la sucesión definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ y recursivamente $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 4$. El teorema de Zeckendorf indica que todo entero positivo M tiene una representación única como suma (excluyendo a F_1 de la suma) de uno o más números de Fibonacci distintos tal que no hayan números de Fibonacci consecutivos en la suma. Por ejemplo, la representación de Zeckendorf de 100 es $100 = 89 + 8 + 3 = F_{11} + F_6 + F_4$. Encuentre las representaciones de Zeckendorf de $M_1 = 200$ y $M_2 = 300$. Explique.

Problem. Consider the Fibonacci sequence $\{F_n\}$. That is, consider the sequence defined by $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ and recursively $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 4$. Zeckendorf's theorem indicates that every positive integer M has a unique representation as a sum (excluding F_1 from the sum) of one or more distinct Fibonacci numbers such that no two consecutive Fibonacci numbers appear in the sum. For example, Zeckendorf's representation of 100 is $100 = 89+8+3 = F_{11} + F_6 + F_4$. Find Zeckendorf's representations of $M_1 = 200$ and $M_2 = 300$. Explain.

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Considere la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$. Esto es, considere la sucesión definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ y recursivamente $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 4$. El teorema de Zeckendorf indica que todo entero positivo M tiene una representación única como suma (excluyendo a F_1 de la suma) de uno o más números de Fibonacci distintos tal que no hayan números de Fibonacci consecutivos en la suma. Por ejemplo, la representación de Zeckendorf de 100 es $100 = 89 + 8 + 3 = F_{11} + F_6 + F_4$. Encuentre las representaciones de Zeckendorf de $M_1 = 200$ y $M_2 = 300$. Explique.

Problem. Consider the Fibonacci sequence $\{F_n\}$. That is, consider the sequence defined by $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ and recursively $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 4$. Zeckendorf's theorem indicates that every positive integer M has a unique representation as a sum (excluding F_1 from the sum) of one or more distinct Fibonacci numbers such that no two consecutive Fibonacci numbers appear in the sum. For example, Zeckendorf's representation of 100 is $100 = 89+8+3 = F_{11} + F_6 + F_4$. Find Zeckendorf's representations of $M_1 = 200$ and $M_2 = 300$. Explain.

Solución.

Los primeros 15 números de Fibonacci son $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\}$.

$$M_1 = 200 = 144 + 55 + 1 = F_{12} + F_{10} + F_2.$$

$$M_2 = 300 = 233 + 55 + 8 + 3 + 1 = F_{13} + F_{10} + F_6 + F_4 + F_2.$$

Mesa #	Valor : 10 ptos.
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Un hexágono regular tiene lado que mide 1. Calcule el promedio de las áreas de los 20 triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Explique.

Problem. A regular hexagon has side length 1. Compute the average of the areas of the 20 triangles whose vertices are vertices of the hexagon. Explain.

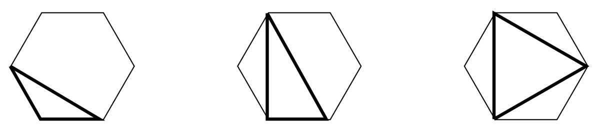
Mesa #	**Valor : 10 ptos.**
Dorado Academy, 2015	**Tiempo : 5 mins.**

Problema. Un hexágono regular tiene lado que mide 1. Calcule el promedio de las áreas de los 20 triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Explique.

Problem. A regular hexagon has side length 1. Compute the average of the areas of the 20 triangles whose vertices are vertices of the hexagon. Explain.

Solución.

Hay 6 triángulos de lados $(1, 1, \sqrt{3})$, 12 triángulos de lados $(1, \sqrt{3}, 2)$ y 2 triángulos equiláteros de lados $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.



Utilizamos la fórmula de Herón, por ejemplo, donde el área está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

si conocemos los tres lados (a, b, c) del triángulo y dónde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro. Cada triángulo de lados $(1, 1, \sqrt{3})$ tiene área $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, cada triángulo de lados $(1, \sqrt{3}, 2)$ tiene área $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y cada triángulo de lados $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ tiene área $A_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ El promedio de las áreas de los 20 triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono es

$$\frac{6A_1 + 12A_2 + 2A_3}{20} = \frac{6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{20} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{4} + \frac{24\sqrt{3}}{4} + \frac{6\sqrt{3}}{4}}{20} = \frac{9\sqrt{3}}{20}.$$