Repaso Examen Final Mate 3024:

1. Encuentre todas las raíces o soluciones de

   - $x^4 + x^3 - 7\,x^2 - x + 6 = 0$. Las posibles raíces racionales son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

     $$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ 2 & & 2 & 6 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

     $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & & 2 & 10 & 18 \\ \hline & 1 & 5 & 9 & 15 \end{array}$$

     2 no es una raíz de multiplicidad 2.

     $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

     El cociente de la ultima divisón es $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) = 0 \to x = -1$ ó $x = -3$. Las raíces son $\{2, 1, -1, -3\}$.

   - $x^4 + 4\,x^2 - 3\,x^3 - 6\,x + 4 = 0$ Las posibles raíces racionales son $\pm1, \pm2, \pm4$.

     $$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 4 & -6 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

     $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

     2 no es una raíz de multiplicidad 2.

     $$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}.$$

     El cociente de la última división es $x^2 + 2 = 0 \to x = -\sqrt{2}i$ ó $x = -\sqrt{2}i$. Las raíces son $\{2, 1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$.

2. Encuentre k tal que $x+2$ es un factor de x^3+5x^2-kx+2.
   La hipotesis implica que $(-2)^3+5\cdot(-2)^2+k(-2)+2=0 \to -8+20-2k+2 \to -2k=-14 \to k=7$.
3. Si $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una raíz de $p(x)=x^4-2\,x^3-x+2$, encuentre todos sus ceros. Tenemos que el conjugado de $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ es raíz de $p(x)=0$, esto es, $p(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=0$.
   Por lo tanto $(x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))(x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))=x^2+x+1$ es factor de $p(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad x^2-3x+2 \\
\hline
x^2+x+1 & x^4-2x^3 \quad\quad\quad\quad -x+2 \\
 & -x^4-x^3-x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad -3x^3-x^2-x \\
 & \quad\ \ 3x^3+3x^2+3x \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad 2x^2+2x+2 \\
 & \quad\quad -2x^2-2x-2 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

   Poe lo tanto resto de ceros de $p(x)$ son $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0 \to x=2,1$.
4. Encuentre el residuo y el cociente al dividir $p(x)=x^4+x^2-3x+1$ entre $x-2$.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
2 & & 2 & 4 & 10 & 14 \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 & 7 & 15
\end{array}
$$

   Así que el cociente es $Q(x)=x^3+2x^2+5x+7$ y el residuo es $r=15$.
5. Encuentre el residuo al dividir $p(x)=x^{1000}+x^{202}-3x^{32}+1$ entre $x-i$.
   $r=(i)^{1000}+(i)^{2002}-3(i)^{32}+1=1-1-3\cdot 1+1=-2$
6. Resolver sobre los números reales.
   - $81^x=\frac{1}{9^{2x}} \leftrightarrow 3^{4x}=3^{-4x} \to x=0$.
   - $3^{\log_3(3x+1)}=\log_3(3^{5-x}) \leftrightarrow 3x+1=5-x \leftarrow 3x+x=5-1 \to 4x=4 \to x=1$

- $2^{2x-1} = 3^{x-1}$

$$\begin{aligned} \log_2(2^{2x-1}) &= \log_2(3^{x-1}) \\ 2x-1 &= (x-1)\log_2(3) \\ 2x-1 &= x\log_2(3) - \log_2(3) \\ 2x - x\log_2(3) &= 1 - \log_2(3) \\ x(2-\log_2(3)) &= 1-\log_2(3) \\ x &= \frac{1-\log_2(3)}{2-\log_2(3)} \end{aligned}$$

- $\log_2(\log_2(\log_2(2^{(8x)}))) = 2$
  Tenemos que $\log_2(2^{8x}) = 8x$. Así que $\log_2(\log_2(8x)) = 2 \leftrightarrow \log_2(8x) = 2^2 \leftrightarrow 8x = 2^4 \to x = 2$.
- $2x \cdot \ln(x) + x = 0 \leftrightarrow x(2\ln(x)+1) = 0 \to \underline{x=0}$ ó $2\ln(x)+1 = 0$.
  Notar que $2\ln(x)+1 = 0 \to 2\ln(x) = -1 \to \ln(x) = -\frac{1}{2} \to \underline{x = e^{-\frac{1}{2}}}$. Notar que cero es un raíz extraña.
- $\log_5(x+18) + \log_5(x-6) = 2 \cdot \log_5(x)$

$$\begin{aligned} \log_5((x+18)(x-6)) = \log_5(x^2) &\to (x+18)(x-6) = x^2 \\ x^2 + 12x - 108 = x^2 &\to 12x - 108 = 0 \to x = 9 \end{aligned}$$

- $\log(x+90) + \log(x) = 1$

$$\log((x+90)x) = 1 \to (x+90)x = 10 \to x^2 + 90x - 10 = 0$$
$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{8100+40}}{2} = \frac{-90 \pm \sqrt{8140}}{2}$$

  Solo uno de los valores es positivo, por lo tanto $\frac{-90+\sqrt{8140}}{2}$ es la solución.
- $\cos(x) = -1$ para $x \in \mathbb{R}$ .Si $x = (2m+1)\pi$ para m un entero tenemos que $\cos(x) = \cos(\pi) = -1$.
- $\tan(x) = 1$ para $x \in \mathbb{R}$. Las soluciones son $x = \frac{\pi}{4} + \pi m$ con m un entero.
- $\cos^2(x) = 1$ para $x \in [0, 2\pi)$.
  Las soluciones son $\cos(x) = 1$ ó $\cos(x) = -1$. La soluciones son $x = 0, \pi$, respectivamente.
- $\text{sen}^2(x) - 1 = 0$ para $x \in [0, 2\pi)$.
  $\text{sen}^2(x) - 1 = (\text{sen}(x)-1)(\text{sen}(x)+1) = 0 \to \text{sen}(x) = 1$ ó $\text{sen}(x) = -1$. Las soluciones $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, respectivamente.

- $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$ para $x \in [0, 2\pi)$.

  Sea $\theta = 2x$, $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \to (1)\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k_1$ ó $(2)\theta = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k_2$, k_1, k_2 enteros.

  Caso 1.

  - Si $k = 0$, entonces $2x = \dfrac{2\pi}{3} \to x = \dfrac{\pi}{3}$.
  - Si $k = 1$, entonces $2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi \to x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{2} \to x = \dfrac{4\pi}{3}$.
  - Si $k = 2$, entonces $2x = \dfrac{2\pi}{3} + 4\pi \to x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi > 2\pi$.

  Caso 2.

  - Si $k = 0$, entonces $2x = \dfrac{4\pi}{3} \to x = \dfrac{4\pi}{3}$.
  - Si $k = 1$, entonces $2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi \to x = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{3}$.
  - Si $k = 2$, entonces $2x = \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi \to x = \dfrac{4\pi}{2} + 2\pi > 2\pi$.

- $\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) - 2 = 0$ para $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) - 2 = (\operatorname{sen}(\theta) + 2)(\operatorname{sen}(\theta) - 1) = 0 \to \operatorname{sen}(\theta) = -2 \text{ ó } \operatorname{sen}(\theta) = 1$$

  $\operatorname{sen}(\theta) = -2$ no tiene solución. $\operatorname{sen}(\theta) = 1$ tiene como solución $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

- $\sin(\theta)\cos(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ para $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \leftrightarrow 2\sin(\theta)\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \leftrightarrow \operatorname{sen}(2\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Sea $x = 2\theta$, $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \to (1)x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k_1$ ó $(2)x = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k_2$, k_1, k_2 enteros.

  Caso 1.

  - Si $k = 0$, entonces $2\theta = \dfrac{7\pi}{6} \to x = \dfrac{7\pi}{12}$.
  - Si $k = 1$, entonces $2\theta = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi \to x = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{2} \to x = \dfrac{19\pi}{12}$.

  Caso 2.

- Si $k=0$, entonces $2\theta = \frac{11\pi}{6} \to x = \frac{11\pi}{12}$.
- Si $k=1$, entonces $2\theta = \frac{11\pi}{6} + 2\pi \to x = \frac{11\pi}{6} + \frac{2\pi}{2} > 2\pi$.

- $4\cos^2(x) - 2\cos(x)(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} = 0$ para $x \in [0, 2\pi)$.

$$4\cos^2(x) - 2\cos(x)(\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} = (2\cos(x) - \sqrt{2})(2\cos(x) - 1) = 0$$
$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ó } \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tiene como soluciones $x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ tiene como soluciones $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

7. Resolver $x^2 + 2x - 11 = 0$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}.$$

8. Escribe la expresión en forma expandida: $\log_4\left(\frac{x(x+1)}{16(x+2)(x+3)}\right)$.

$$\begin{aligned}\log_4\left(\frac{x(x+1)}{16(x+2)(x+3)}\right) &= \log_4(x(x+1)) - \log_4(16(x+2)(x+3)) \\ &= \log_4(x) + \log_4(x+1) - (\log_4(16) + \log_4(x+2) + \log_4(x+3)) \\ &= \log_4(x) + \log_4(x+1) - 2 - \log_4(x+2) - \log_4(x+3)\end{aligned}$$

9. Resolver para y la siguiente expresión:

$$\ln(2y) = \ln(x-1) + \ln(x+1) + 1 \leftrightarrow \ln(2y) = \ln((x-1)(x+1)) + \ln(e) \leftrightarrow$$
$$\ln(2y) = \ln(e(x^2-1)) \leftrightarrow 2y = e(x^2-1) \leftrightarrow y = \frac{e}{2}(x^2-1)$$

10. ¿Cuánto tiempo es necesario para un depósito de \$100 se duplique, con una tasa de 5 % compuesto continuamente? Dejar expresada su contestación.
Fórmula de Interés Continuo: $A = A_0 e^{rt}$. Dado que $A = 200, r = .05$, tenemos que

$$200 = 100e^{.05t} \leftrightarrow 2 = e^{.05t} = \ln(2) = .05t \leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{.05}$$

11. Noel pagó \$37,500 por un Porsche 911 usado. Después de cuatro años valía \$21,000. Suponga que el precio disminuye de acuerdo con el modelo de decaimiento exponencial continuo $P = P_0 e^{rt}$.

Encuentre la constante de decaimiento.

$$21000 = 37000e^{4r} \to \frac{21}{37} = e^{4r} \to \ln(\frac{21}{37}) = 4r \to r = \frac{\ln(\frac{21}{37})}{4}$$

12. Probar que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\cos(\pi - x) = \cos(\pi)\cos(x) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(x) = (-1) \cdot \cos(x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(x) = -\cos(x).$

13. Probar que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(\frac{\pi}{2}) = (1) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot (0) = \operatorname{sen}(x).$

14. Si $\cos(x) = -\frac{1}{5}$ y $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, encuentre el valor del resto de funciones trigonométricas. Tenemos que $(-\frac{1}{5})^2 + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \to \operatorname{sen}^2(x) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \to \operatorname{sen}(x) = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Por lo tanto $\operatorname{sen}(x) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.
15. Si $\operatorname{sen}(x) = -\frac{2}{7}$ y $x \in (\pi, 2\pi)$, encuentre el valor del resto de funciones trigonométricas. $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - (-\frac{2}{7})^2} \to \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{45}{49}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{7}$. Con la información dada no podemos determinar el signo de $\cos(x)$. Tenemos $\csc(x) = -\frac{7}{2}, \sec(x) = \pm\frac{7}{3\sqrt{5}}, \tan(x) = \pm\frac{2}{3\sqrt{5}}, \cot(x) = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$.
16. Sea α un ángulo en posición estandar con lado terminal pasando por $(-2, -5)$, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas.
    $r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.
    - $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{5}{\sqrt{29}}$
    - $\cos(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{29}}$
    - $\sec(\alpha) = -\frac{\sqrt{29}}{2}$
    - $\csc(\alpha) = -\frac{\sqrt{29}}{5}$

- $\tan(\alpha) = \frac{5}{2}$
- $\cot(\alpha) = \frac{2}{5}$

17. Sea α un ángulo en posición estandar con lado terminal pasando por $(1, -4)$, encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas.
$r = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.
    - $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$
    - $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{17}}$
    - $\sec(\alpha) = \sqrt{17}$
    - $\csc(\alpha) = -\frac{\sqrt{17}}{4}$
    - $\tan(\alpha) = -4$
    - $\cot(\alpha) = -\frac{1}{4}$
18. Sean $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin(\beta) = -\frac{1}{4}, \beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, encuentre:
Primero vamos a encontrar los valores de $\operatorname{sen}(\alpha), \cos(\beta)$.

    $\operatorname{sen}(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Por lo tanto $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
$\cos(\beta) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$. Por lo tanto $\cos(\beta) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

    - $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) = (\frac{1}{3})(-\frac{\sqrt{15}}{4}) - (-\frac{1}{4})(\frac{2\sqrt{2}}{3}) = -\frac{\sqrt{15}}{12} + \frac{2\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$
    - $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) = (\frac{1}{3})(-\frac{\sqrt{15}}{4}) + (-\frac{1}{4})(\frac{2\sqrt{2}}{3}) = -\frac{\sqrt{15}}{12} - \frac{2\sqrt{2}}{12} = \frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$

- $\sin(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) = (\frac{2\sqrt{2}}{3})(-\frac{\sqrt{15}}{4})+(-\frac{1}{4})(\frac{1}{3}) = (-\frac{2\sqrt{30}}{12} + (-\frac{1}{12}) = \frac{-2\sqrt{30}-1}{12}$
- $\sin(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) = (\frac{2\sqrt{2}}{3})(-\frac{\sqrt{15}}{4})-(-\frac{1}{4})(\frac{1}{3}) = (-\frac{2\sqrt{30}}{12} + (\frac{1}{12}) = \frac{-2\sqrt{30}+1}{12}$
- el cuadrante de $\alpha+\beta$. Tercer cuadrante ya $\cos(\alpha+\beta) < 0$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) < 0$.
- el cuadrante de $\alpha-\beta$. Tercer cuadrante ya $\cos(\alpha-\beta) < 0$ y $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) < 0$.

19. Encuentre el valor exacto.
    - $\cos(\frac{7\pi}{12}) =$

$$\begin{aligned}\cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) &= \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

    - $\cos(\frac{7\pi}{13})\cos(\frac{6\pi}{13}) - \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{13})\operatorname{sen}(\frac{6\pi}{13}) = \cos(\frac{7\pi}{13}+\frac{6\pi}{13}) = \cos(\pi) = -1$.
    - $\sin(2^{1000}\cdot\pi)$. Tenemos 2^{100} es par, así que $2^{100}\cdot\pi$ es múltiplo par de π. Tenemos $\operatorname{sen}(2^{100}\cdot\pi) = \operatorname{sen}(0) = 0$.
    - $\cos((2^{1000}+1)\pi)$. Tenemos $2^{100}+1$ es impar, así que $(2^{100}+1)\pi$ es múltiplo impar de π. Tenemos $\cos((2^{100}+1)\pi) = \cos(\pi) = -1$.
    - $\sin(\frac{\pi}{8})$

      Tenemos $\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$ y $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}) = \operatorname{sen}(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}\\ &= \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

      $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ya $\frac{\pi}{8}$ está en primer cuadrante.

- $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$.
- $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$, Sea $y = \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ con $0 \leq y \leq \pi$. Así que $\cos(y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto $y = \frac{\pi}{4}$.

20. Verificar las siguientes identidades.
    - $1 - \sec(x)\cos^3(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

$$1 - \sec(x)\cos^3(x) = 1 - \frac{1}{\cos(x)} \cdot \cos^3(x) = 1 - \cos^2(x) = \operatorname{sen}^2(x)$$

- $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\csc(x)} + \dfrac{\cos(x)}{\sec(x)} = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\csc(x)} + \frac{\cos(x)}{\sec(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} + \frac{\cos(x)}{\frac{1}{cos(x)}} &= \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{1} + \cos(x) \cdot \frac{\cos(x)}{1} \\ &= \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\end{aligned}$$

- $\cot(x)\operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)\sec(x) = 0$

$$\begin{aligned}\cot(x)\operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)\sec(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos^2(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \cos(x) - \cos(x) = 0\end{aligned}$$

- $\dfrac{\csc(y) + 1}{\csc(y) - 1} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}(y)}{1 - \operatorname{sen}(y)}$

$$\frac{\csc(y) + 1}{\csc(y) - 1} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(y)} + 1}{\frac{1}{\operatorname{sen}(y)} - 1} = \frac{\frac{1+\operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(y)}}{\frac{1-\operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(y)}} = \frac{1 + \operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(y)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(y)}{1 - \operatorname{sen}(y)} = \frac{1 + \operatorname{sen}(y)}{1 - \operatorname{sen}(y)}$$

- $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen}(x)\cos(y)} = 1 + \cot(x)\tan(y)$

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\sin(x)\cos(y)} = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(y)} &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{\operatorname{sen}(x)\cos(y)} + \frac{\operatorname{sen}(y)\cos(x)}{\cos(y)\operatorname{sen}(x)} \\ &= 1 + \tan(y)\cot(x)\end{aligned}$$

- $\sin(x - y) - \sin(y - x) = 2\sin(x)\cos(y) - 2\cos(x)\sin(y)$

$$\begin{aligned}\sin(x - y) - \sin(y - x) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x) - (\operatorname{sen}(y)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(y)) \\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x) - \operatorname{sen}(y)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(y) \\ &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(y) - 2\operatorname{sen}(y)\cos(x)\end{aligned}$$

21. Considera la función $f(x) = -3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$
    - Encuentre la amplitud de la gráfica de $f(x)$. $A = |-3| = 2$.
    - Encuentre el periodo de $f(x)$. $\frac{2\pi}{2} = \pi$
    - Encuentre el máximo y mínimo de $f(x)$.El máximo 4 y el mnímo -2.
    - Graficar un ciclo de $f(x)$