Competencia de matemáticas invitacional
Saint Francis School
Nivel superior

Elaborado por:

Prof. Edwin Flórez - UPRM
Dr. Rafael Aparicio - UPRRP
Dr. José De Jesús - UPRRP
Dr. Luis Fuentes - UPRRP

integrantes del Grupo STutorPR

Marzo 17 de 2017

1. (10 points) (5 min) Considere la función cuadrática $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(13, 5)$ e intercepta al eje-x en los puntos $(20, 0)$ y $(30, 0)$. Halle $f(37)$.

   Consider the cuadratic function $f(x)$ *whose graph pass through the point* $(13, 5)$ *and intersects the* x*-axis at the points* $(20, 0)$ *and* $(30, 0)$*. Find* $f(37)$*.*

2. (10 points) (5 min) En una reunión familiar asistieron 15 personas, al escribir sus edades de menor a mayor se dieron cuenta que las edades estaban en progresión aritmética. Si la persona más vieja en la reunión tiene 94 años y la persona que estaba de número 7 en la lista tiene 46 años, ¿cuál es la edad de la persona más joven en la reunión?

Fifteen people attended to a family reunion. When they wrote their ages from the youngest person to the oldest, they realized that the ages were related in arithmetic progression. If the oldest person in the meeting is 94 years old and the person who was number 7 on the list is 46 years old, what is the age of the youngest person in the meeting?

3. (10 points) (5 min) Los equipos A y B juegan la serie final de un torneo de baloncesto. El equipo que primero gane 4 juegos obtiene el campeonato. Si se sabe que el equipo que gane el primer juego, ganará también el tercero, y que el equipo que gane el segundo juego, también ganará el cuarto, encuentre el número de maneras diferentes en que se puede dar la serie final.

   Teams A and B are going to play the championship tournament. The first team that wins four games is declare to be the champion. If it is known that the team who wins the first game will also wins the third game, and that the team who wins the second game will also wins the fourth game, find the number of distinct possible development of the championship tournament.

4. (10 points) (5 min) Ocho niños se comen 8 bizcochos en 8 minutos. ¿Cuántos niños son necesarios para comerse 2 bizcochos en 2 minutos?

   Eight children eat 8 cupcakes in 8 minutes. How many children are needed to eat 2 cupcakes in 2 minutes?

5. (10 points) (5 min) Si $x^2 + x - 3 = 0$, halle el valor de $x^4 - 7x^2 + 14$.

   If $x^2 + x - 3 = 0$, *find the value of* $x^4 - 7x^2 + 14$.

6. (10 points) (5 min) Si a y b son números enteros positivos, tal que $a \neq b$. Hallar las soluciones de la ecuación:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right) = 0$$

Let a and b be positive integer such that $a \neq b$. Find the solutions of the equation:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right) = 0$$

7. (10 points) (5 min) Para cada entero positivo n, se define

$$f(n) = \begin{cases} \log_9 n & \text{si } \log_9 n \text{ es racional,} \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Calcule $\sum_{n=1}^{2017} f(n)$.

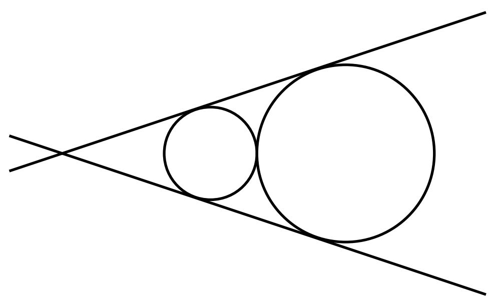
For each positive integer n, define

$$f(n) = \begin{cases} \log_9 n & \log_9 n \textit{ is rational,} \\ 0 & \textit{otherewise.} \end{cases}$$

Compute $\sum_{n=1}^{2017} f(n)$.

8. (10 points) (5 min) Un arquitecto está diseñando dos bases circulares para una construcción, como se muestra en la figura. Para continuar con su trabajo el arquitecto debe encontrar el radio del círculo mas grande. El sabe que el radio del círculo mas pequeño es 1 y que los dos círculos están dentro del calzo (cuña) formado por las ecuaciones $y = \pm\frac{x}{3}$. Ayude al arquitecto con este cálculo (encontrando el radio del círculo mas grande).

   An architect is designing two circular bases for a construction, as shown in the figure. In order to continue with the design the architect must find the radius of the largest circle. He knows that the radius of the smallest circle is 1 *and that the two circles are inside the wedge defined by the equations* $y = \pm\frac{x}{3}$. *Help the architect with this calculation* (*by finding the radius of the largest circle*).



9. (10 points) (5 min) Para una sucesión finita $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de números reales se define *la suma de Cèsaro de la sucesión A* mediante la fórmula

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$$

donde $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para $1 \leq k \leq n$.

Si la suma de Cèsaro de una sucesión de $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$, que tiene 99 términos, es 1000, encuentre la suma de Cèsaro para la sucesión $\langle 1, a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$ que tiene 100 términos.

The Cèsaro sum of a finite sequence of real numbers $A = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ is defined by the formula

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n},$$

where $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para $1 \leq k \leq n$.

If the Cèsaro sum of a 99-term sequence $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$ is 1000, find the Cèsaro sum of the 100-term sequence $\langle 1, a_1, a_2, \ldots, a_{99} \rangle$.

10. (10 points) (5 min) Considere todos los enteros positivos de tres dígitos. ¿Cuántos de estos enteros tienen los tres dígitos diferentes y a su vez son números pares?

    Consider all positive integers of three digits. How many of these integers are even and with all digits distincts?