WIKIPEDIA

Grupo abeliano libre

En álgebra abstracta, un **grupo abeliano libre** es un grupo abeliano que tiene una *base* en el sentido de que cada elemento del grupo se puede escribir de manera unívoca como combinación lineal de los elementos de la base, con coeficientes enteros. Por lo tanto, un grupo abeliano libre sobre una base *B* también se conoce como un conjunto de **sumas formales** sobre *B*. De manera informal, un elemento de un grupo abeliano libre también puede ser visto como un multiconjunto signado de elementos de B.

Los grupos abelianos libres tienen propiedades que los asemejan a los espacios vectoriales y permiten que un grupo abeliano en general se entiende como un cociente de un grupo abeliano libre por "relaciones". Cada grupo abeliano libre tiene un rango definido como la cardinalidad de una base. El rango determina el grupo salvo isomorfismos, y los elementos de dicho grupo se pueden escribir como sumas finitas formales de los elementos de la base. Cada subgrupo de un grupo abeliano libre es abeliano libre, lo cual es importante para la descripción de un grupo abeliano en general como conúcleo de homomorfismo entre grupos abelianos libres.

Índice

Ejemplo

Por ejemplo, sea G el grupo que es la suma directa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ de dos copias del grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$.

Simbólicamente,

$$G = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

Una base de este grupo es {(1,0), (0,1)}.

Si escribimos $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, entonces podemos escribir el elemento (4,3), como

$(4,3) = 4e_1 + 3e_2$, donde la *multiplicación* se define de la manera siguiente: $4e_1 := e_1 + e_1 + e_1 + e_1$.

Con esta base no hay otra manera de escribir (4,3), pero si elegimos como base {(1,0), (1,1)}, donde $f_1 = (1,0)$ y $f_2 = (1,1)$, entonces podemos escribir (4,3), como

$$(4,3) = f_1 + 3f_2.$$

A diferencia de lo que ocurre con los espacios vectoriales, no todos los grupos abelianos tienen una base (de ahí el nombre especial para los que lo si la tienen). Por ejemplo, ningún grupo con elementos (no triviales) periódicos puede ser abeliano libre, ya que dichos elementos pueden ser expresados en un número infinito de formas, simplemente mediante el establecimiento de un número arbitrario de ciclos construidos a partir de la periodicidad.

El grupo abeliano trivial $\{0\}$ también se considera abeliano libre, con base el conjunto vacío.

Terminología

Hay que tener en cuenta que un *grupo abeliano libre* , *no* es un grupo libre, excepto en dos casos: un grupo abeliano libre con una base vacía (rango de 0, dando el grupo trivial) o tener sólo un elemento en la base (rango 1, dando un grupo cíclico infinito). Cualquier otro grupo abeliano no es un grupo libre, porque, en grupos libres, el elemento *ab* debe ser diferente del *ba* si *a* y *b* son elementos diferentes de la base, mientras que deben ser idénticos en grupos abelianos libres. Sin embargo, los grupos abelianos libres son objetos libres en la categoría de grupos abelianos.

Propiedades

1. Para cada conjunto *B*, existe un grupo abeliano libre con base *B*, y todos los grupos abelianos libres que tienen a *B* como base son isomorfos. Se puede construir un ejemplo con el grupo abeliano de las funciones de *B*, donde cada función puede tomar valores enteros, y todos, excepto un número finito de sus valores son cero. Esta es la suma directa de copias de $\mathbb{Z}$, una copia para cada elemento de la *B*.

1. Si *F* es un grupo abeliano libre con base *B*, entonces tenemos la siguiente propiedad universal: por cada función *f* de *B* en cualquier grupo abeliano *A*, existe un único homomorfismo del grupo de *F* en *A* que extiende a *f*. Esta propiedad universal también se puede utilizar para definir grupos abelianos libres.

1. Dado un grupo abeliano *A*, siempre existe un grupo abeliano libre *F* y un epimorfismo (esto es, un homomorfismo sobreyectivo) del grupo de *F* en *A*. Esto se deduce de la propiedad universal mencionada anteriormente.

1. Todos los grupos abelianos libres son libres de torsión, y todos los grupos abelianos finitamente generados y libres de torsión son grupos abelianos libres (lo mismo se aplica a módulos planos, ya que un grupo abeliano es libre de torsión, si y sólo si, como $\mathbb{Z}$-módulo es plano). El grupo aditivo de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano libre de torsión (no finitamente generado), grupo que no es abeliano libre. La razón: $\mathbb{Q}$ es divisible, pero ningún grupo abeliano libre distinto del trivial es divisible.

1. Los grupos abelianos libres son un caso especial de módulos libres, ya que los grupos abelianos no son otra cosa que módulos sobre el anillo $\mathbb{Z}$.

Es importante destacar que todo subgrupo de un grupo abeliano libre es libre abeliano (ver más abajo). Como consecuencia, para cada grupo abeliano *A* existe una sucesión exacta corta

$$0 \to G \to F \to A \to 0$$

donde *F* y *G* grupos abelianos libres (lo que significa que *A* es isomorfo al grupo cociente *F* /*G*). A esto se le llama *resolución libre* de *A*. Por otra parte, los grupos abelianos libres son, precisamente, los objetos proyectivos en la categoría de grupos abelianos.[1]

Puede ser sorprendentemente difícil determinar si un grupo concreto dado es abeliano libre. Considere por ejemplo el grupo de Baer-Specker $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, el producto directo (que no debe confundirse con la suma directa, que difiere del producto directo de un número infinito de sumandos) de una cantidad infinita numerable de copias de $\mathbb{Z}$. Reinhold Baer demostró en 1937 que este grupo *no* es abeliano libre; Specker demostró en 1950 que cada subgrupo numerable de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ es abeliano libre.

Rango de un grupo abeliano libre

Cada grupo abeliano libre finitamente generado es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ para algún número natural *n*, denominado **rango** del grupo abeliano libre. En general, un grupo abeliano libre *F* puede tener muchas bases diferentes, pero todas ellas tienen el mismo cardinal, y a esta cardinalidad se le llama **rango** de *F*. Este rango de grupos abelianos libres se pueden utilizar para definir el rango de un grupo abeliano en general. Las relaciones entre las diferentes bases pueden ser interesantes, por ejemplo, las diferentes posibilidades para elegir una base para el grupo abeliano libre de rango dos se examinan en el artículo sobre el par fundamental de períodos.

Suma formal

Una *suma formal* de elementos de un conjunto dado *B* es un elemento del grupo abeliano libre con base *B*.

En otras palabras, dado un conjunto *B*, sea *G* el único grupo abeliano libre con base *B* (salvo isomorfismo).

Sean $b_1, b_2, \ldots \in B$ y $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}$. Definimos su **suma formal** como:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \in G$$

donde existirá un $n \in \mathbb{N}$ de forma que $a_i = 0$ si $i \geq n$.

Subgrupos de un grupo abeliano libre

Cada subgrupo de un grupo abeliano libre es también un grupo abeliano libre. Esto es similar al teorema de Nielsen-Schreier que dice que un subgrupo de un grupo libre es libre.[2]

Teorema: Sea F el grupo abeliano libre generado por el conjunto $X = \{x_k \mid k \in I\}$ y sea $G \subset F$ un subgrupo. Entonces G es un grupo abeliano libre.

Demostración:[3] Si $G = \{0\}$, la afirmación se cumple. Supongamos que G no es el grupo trivial. En primer lugar vamos a probar esto para X por inducción. Si $|X| = 1$, G es isomorfo al $\mathbb{Z}$ (que es no trivial y claramente es abeliano libre. Supongamos que si un grupo es generado por un conjunto de cardinalidad $\leq k$, entonces todos sus subgrupos son libres. Sean $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$, sea F el grupo libre generado por X, y sea $G \subset F$ un subgrupo. Sea $\mathbf{pr}\colon G \to F$ la proyección $\mathbf{pr}(a_1 x_1 + \cdots + a_{k+1} x_{k+1}) = a_1 x_1$. Si $\mathbf{Rng}(\mathbf{pr}) = \{0\}$, entonces G es un subconjunto de $\langle x_2, \ldots, x_{k+1} \rangle$ y es libre por la hipótesis de inducción. Por lo tanto podemos suponer que el rango no es trivial. Sea $m > 0$ el menor tal que $mx_1 \in \mathbf{Rng}(\mathbf{pr})$ y elegimos x de forma que $\mathbf{pr}\, x = mx_1$. Es sencillo comprobar que $x \notin \mathbf{Ker}(\mathbf{pr})$, y si $y \in G$, entonces $y = nx + k$, donde $k \in \mathbf{Ker}(\mathbf{pr})$ y $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $G = \mathbf{Ker}(\mathbf{pr}) \oplus \langle x \rangle$. Por la hipótesis de inducción $\mathbf{Ker}(\mathbf{pr})$ y $\langle x \rangle$ son libres: el primero es isomorfo a un subgrupo $\langle x_2, \ldots x_{k+1} \rangle$ y el segundo a $\mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que $X = \{x_i \mid i \in I\}$ es arbitrario. Para cada subconjunto J de I sea F_J es el grupo libre generado por $\{x_i \mid i \in J\}$, por lo tanto $F_J \subset F$ es un subgrupo libre y denotamos $G_J = F_J \cap G$.

Ahora sea

$$S = \{(G_J, w) \mid G_J \text{ es un grupo libre no trivial y } w \text{ es una base de } G_J\}.$$

Formalmente dw es una aplicación inyectiva

$$w : J' \to G_J$$

de tal manera que $w[J']$ genera G_J.

Es evidente que S es no vacío: Tomemos un elemento x de G. Luego $x = a_1 x_{i_1} + \cdots + a_n x_{i_n}$ y por lo tanto el grupo libre generado por $J = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ contiene a x y la intersección $G \cap F_J$ es un subgrupo no trivial de un grupo finito abeliano libre, y por lo tanto libre, por inducción.

Si $(G_J, w), (G_K, u) \in S$, definamos el orden $(G_J, w) \leq (G_K, u)$ si y sólo si $J \subset K$ y la base u será una extensión de w; formalmente, si $w : J' \to G_J$ y $u : K' \to G_K$, entonces $J' \subset K'$ y $u \restriction w = w$.

Si $(G_{J_r}, w_r)_{r \in L}$ es una $\leq$-cadena (L es un orden lineal) de elementos de S, entonces, evidentemente,

$$(\bigcup_{r \in L} G_{J_r}, \bigcup_{r \in L} w_r) \in S,$$

por lo que se puede aplicar el lema de Zorn y concluimos que existe un (G_J, w) maximal. Como $G_I = G$, es suficiente probar ahora que $J = I$. Supongamos lo contrario: que existe un $k \in I \setminus J$.

Sea $K = J \cup \{k\}$. Si $G_K = F_K \cap G = G_J$,, entonces esto significa que $(G_J, w) \leq (G_K, w)$, pero no son iguales, así que (G_K, w) es mayor, lo cual contradice maximalidad de (G_J, w). De lo contrario, habría un elemento $n x_k + y \in G_K$ de tal manera que $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $y \in F_J$.

El conjunto $n \in \mathbb{Z}$ para el cual existe $y \in F_J$ de tal manera que $n x_k + y \in G_K$ forma un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Sea n_0 un generador de este grupo sea $w_k = n_0 x_k + y \in G_K$ con $y \in F_J$. Ahora bien, si $z \in G_K$, entonces para algún $m \in Z$, $z = z - m w_k + m w_k$, donde $z - m w_k \in G_J$.

Por otra parte claramente $w_k \mathbb{Z} \cap F_J = \{0\}$, por lo que $w' = w \cup \{w_k\}$ es una base de G_K, por lo que $(G_K, w') \geq (G_J, w)$ contradiciendo de nuevo la maximalidad. $\square$

Véase también

- Grupo abeliano finitamente generado

Referencias

1. Griffith, Phillip A. (1970). *Infinite Abelian group theory* (https://archive.org/details/infiniteabeliang0000grif). Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press. p. 18 (https://archive.org/details/infiniteabeliang0000grif/page/18). ISBN 0226308707.
2. Johnson, D. L. (1980). «Topics in the Theory of Group Presentations». *London Mathematical Society lecture note series* **42**. ISBN 9780521231084.

3. Esta prueba es una aplicación de lema de Zorn y se puede encontrar en el Apéndice 2 § 2, página 880 de Plantilla:Lang Álgebra.

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Grupo_abeliano_libre&oldid=137621333»

Esta página se editó por última vez el 12 ago 2021 a las 09:02.

El texto está disponible bajo la Licencia Creative Commons Atribución Compartir Igual 3.0; pueden aplicarse cláusulas adicionales. Al usar este sitio, usted acepta nuestros términos de uso y nuestra política de privacidad. Wikipedia® es una marca registrada de la Fundación Wikimedia, Inc., una organización sin ánimo de lucro.