Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3153

Apellidos: ____________ ____________ Nombre: ____________
No. de estudiante: ____________ Profesor: ____________
Cuarto Examen: 17 de mayo de 2004 # de sección: ____________

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. (*24 puntos*) Considere el campo vectorial $\mathbf{h}(x, y) = (x^{-1}y^{-2})\mathbf{i} + (x^{-2}y^{-1})\mathbf{j}$.

   (a) Evalúe la integral de línea de $\mathbf{h}$ sobre la curva C : $\mathbf{r}(u) = \sqrt{u}\ \mathbf{i} + \sqrt{1+u}\ \mathbf{j}$, donde $u \in [1, 4]$.

   (b) Evalúe la integral de línea de $\mathbf{h}$ sobre el segmento de recta C que va desde $(1, 1)$ hasta $(2, 2)$.

2. (*24 puntos*) Considere el campo vectorial $\mathbf{h}(x,y) = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$.

   (a) Encuentre una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{h}$.

   (b) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr}$ sobre la curva

$$C: \ \mathbf{r}(u) = (2\cos(u))\ \mathbf{i} + (2\sin(u) + 3)\ \mathbf{j},$$

   donde $u \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. (**Ayuda**. ¿Qué podemos inferir acerca de $\int_C \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr}$ a partir de lo obtenido en la parte (a)?).

3. (*12 puntos*) Evalúe $\int_C xy\ dx + 2z\ dy + (y+z)\ dz$ sobre la curva

$$C: \ \mathbf{r}(u) = u\ \mathbf{i} + u\ \mathbf{j} + 2u^2\ \mathbf{k},$$

donde $u \in [0,2]$.

4. (*12 puntos*) Utilice el teorema de Green para evaluar $\displaystyle\oint_C (x^2+y)\ dx + (xy^2)\ dy$, donde $C = \partial\Omega$ es la curva cerrada y simple determinada por la región Ω acotada por las gráficas de $y^2 = x$ y $y = -x$.

5. (*12 puntos*) Sea Ω la región de Jordan cuya frontera $\partial\Omega = C$ esta dada por

$$C: \ x = \cos^3(u); \ y = \sin^3(u),$$

donde $u \in [0, 2\pi]$. Calcule el área de Ω.

6. (*12 puntos*) Calcule el producto vectorial fundamental para

$$\mathbf{r}(u) = u\cos(v)\ \mathbf{i} + u\sin(v)\ \mathbf{j} + \ \mathbf{k}.$$

7. (*14 puntos*) Calcule el área de la superficie S determinada por la gráfica de $z = y^2$ definida sobre el rectángulo $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq x \leq 1$.