Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3153

Apellidos: ________________ ________________ Nombre: ________________
No. de estudiante: ________________ Profesor: ________________
MATE 3152 Examen–III: 2 de marzo de 2004 # de sección: ________________

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. Considere los vectores:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (3, 1, -1)\\
\vec{b} &= (9\lambda - 24, -7, 21\lambda)\\
\vec{c} &= (-1, 2, -3)\\
\vec{d} &= (7, 7\sqrt{2}, 7).
\end{aligned}$$

(a) (*6 puntos*) ¿Qué valor debe tener λ para que $\vec{b}$ sea paralelo al vector $\vec{a}$? Explique.

(b) (*4 puntos*) ¿Qué valor debe tener λ para que $\vec{b}$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$? Explique.

(c) (*6 puntos*) ¿Qué valor debe tener λ para que $\|\vec{b}\| = 25$? Explique.

(d) (*4 puntos*) Encuentre $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

(e) (*6 puntos*) Encuentre $\text{proy}_{\vec{c}}(\vec{a})$.

(f) (*4 puntos*) Encuentre $\vec{a} \times \vec{c}$.

(g) (*6 puntos*) Encuentre los ángulos direccionales de $\vec{d}$.

2. (*6 puntos*) Demuestre que

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

para todo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

3. (*6 puntos*) Suponga que $\vec{a}\neq\vec{0}$. Demuestre que si $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ y $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, entonces $\vec{b}=\vec{c}$.

4. (*6 puntos*) Exprese $\left(4\vec{a}+6\vec{b}\right)\times\left(8\vec{a}+10\vec{b}\right)$ como un múltiplo escalar de $\vec{a}\times\vec{b}$.

5. (*6 puntos*) Encuentre la ecuación vectorial parametrizada $\vec{r}(t)$ de la recta que pasa a través del punto $P(3,-4,5)$ y que es paralela a la recta parametrizada por $\vec{R}(u)=(1+u,3-u,10u)$.

6. (*6 puntos*) Evalúe $\vec{f}'(t)$, si $\vec{f}(t) = (e^{t^2+3t}, \ln(t^2+1), \cos(t))$.

7. (*6 puntos*) Evalúe $\displaystyle\int_0^{\pi} \vec{r}(t)\ dt$, si $\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$.

8. Sean $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ un vector constante y $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

   (a) (*6 puntos*) Demuestre que $\vec{F}(t) = \displaystyle\int_a^t \left(\vec{c} \times \vec{f}(s)\right) ds$ y $\vec{G}(t) = \vec{c} \times \displaystyle\int_a^t \vec{f}(s) ds$ tienen la misma derivada.

   (b) (*2 puntos*) Concluya que $\vec{F}(t) = \vec{G}(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Explique.

9. Considere la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos(3t), t, -\sin(3t))$.

   (a) (*6 puntos*) Encuentre, para toda t, al vector tangente unitario $\vec{T}(t)$.

   (b) (*6 puntos*) Encuentre, para toda t, al vector normal principal $\vec{N}(t)$.

   (c) (*6 puntos*) Encuentre la ecuación, en términos de x, y, z, del plano osculador en el punto en la curva cuando $t = \frac{\pi}{12}$.

10. (*6 puntos*) Encuentre la longitud de la curva determinada por $\vec{r}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$ desde $\vec{r}(0)$ hasta $\vec{r}(4)$.

11. (*6 puntos*) Encuentre el radio de curvatura de la curva $y = 2\sin(2x)$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 2)$.