Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3153

Apellidos: ____________________ ____________________ Nombre: ____________________
No. de estudiante: ____________________ Profesor: ____________________
Examen Final: `13 de diciembre de 2016` # de sección: ____________________

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. (*6 puntos*) Calcule la distancia entre el punto $P_1(1, 0, -1)$ y la recta ℓ parametrizada por

$$\ell : \quad \vec{r}\,(t) = \langle 0, 2, 3\rangle + t\,\langle 2, -1, 1\rangle\,.$$

2. (*6 puntos*) Encuentre la ecuación vectorial parametrizada $\vec{r}\,(t)$ de la recta que pasa a través del punto $P(2, -3, 1)$ y cuya dirección es el vector $\overrightarrow{PQ}$, donde Q es el punto $Q(2, 1, -5)$.

3. Considere la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle 5\cos(t), 5\,\mathrm{sen}(t), 12t\rangle$.

   (a) (*4 puntos*) Encuentre, para toda t, al vector tangente unitario $\vec{T}(t)$.

   (b) (*4 puntos*) Encuentre, para toda t, al vector normal principal $\vec{N}(t)$.

4. (*6 puntos*) Encuentre la longitud de la curva determinada por $\vec{r}(t) = \langle 2\,\mathrm{sen}(t), 5t, 2\cos(t)\rangle$ desde $\vec{r}(-3\pi)$ hasta $\vec{r}(3\pi)$.

5. (*6 puntos*) Sean $u(x,y) = e^x \cos(y)$ y $v(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$. Verifique que,

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{y que} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

6. (*8 puntos*) Dado que $\nabla f = \left\langle 2xy^4 + 3x^2 + \frac{10}{x},\ 4x^2y^3 - 2y \right\rangle$, encuentre la función $f(x,y)$.

7. (*8 puntos*) La ecuación

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

donde c es una constante, se conoce como *la ecuación unidimensional de onda*. Verifique que la función $w(x,t) = e^{x+ct} + 5\cos(3x + 3ct)$ satisface la ecuación unidimensional de onda.

8. (*6 puntos*) Para la función $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$, encuentre la derivada direccional de f en el punto $P_0(1,0,1)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

9. (*6 puntos*) Evalúe la integral $\int_1^2 \int_0^1 (12x^2y + 60x)\; dy\; dx$

10. (*10 puntos*) Utilice coordenadas polares para evaluar $\int_0^{\ln(2)} \int_0^{\sqrt{(\ln(2))^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\; dx\; dy$.

11. (*8 puntos*) Encuentre el volumen del sólido T que está en el primer octante acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 2$ y por el cilindro $x = 4 - y^2$.

12. (*8 puntos*) Evalúe la integral de línea de $\overrightarrow{h}(x, y) = \left\langle 2x + 1, y^2 \right\rangle$ sobre el segmento de recta que va desde $(1, 2)$ hasta $(4, 3)$.

13. (*8 puntos*) Considere el campo vectorial $\overrightarrow{h}(x,y) = \left\langle 2xy^4 + 3x^2 + \frac{10}{x},\ 4x^2y^3 - 2y \right\rangle$. Primero, verifique que $\overrightarrow{h}$ es un gradiente. Segundo, evalúe la integral de línea de $\overrightarrow{h}$ sobre la curva

$$C : \overrightarrow{r}(u) = \langle u, 2 \rangle, \quad u \in [1,2].$$

14. (*8 puntos*) Utilice el teorema de Green para evaluar $\oint_C (6x + y)\ dx + (y + 2x)\ dy$ donde C es el borde del círculo $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

15. (*8 puntos*) Sea S la parte del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy. Determine el flujo del campo vectorial $\vec{v}(x, y, z) = \langle y, x, z \rangle$ a través de la superficie S, en la dirección del vector normal unitario $\vec{n}$ que apunta hacia afuera.