Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3153

Apellidos: ____________ ____________ Nombre: ____________
No. de estudiante: ____________ Profesor: ____________
Primer Examen: 30 de septiembre de 2016 # de sección: ____________

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. Considere los vectores:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \langle -2, 1, 3 \rangle \\ \vec{b} &= \langle 3\lambda + 4, -1, 6\lambda + 1 \rangle \\ \vec{c} &= \langle 4, 2, -1 \rangle \\ \vec{d} &= \left\langle -6, 4, \sqrt{12} \right\rangle . \end{aligned}$$

(a) (*6 puntos*) ¿Qué valor debe tener λ para que $\vec{b}$ sea paralelo al vector $\vec{a}$? Explique.

(b) (*4 puntos*) ¿Qué valor debe tener λ para que $\vec{b}$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$? Explique.

(c) (*6 puntos*) ¿Qué valor (o valores) debe tener λ para que $\|\vec{b}\| = 12$? Explique.

(d) (*4 puntos*) Encuentre $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

(e) (*6 puntos*) Encuentre $\text{proy}_{\vec{c}}(\vec{a})$.

(f) (*4 puntos*) Encuentre $\vec{a} \times \vec{c}$.

(g) (*6 puntos*) Encuentre los cosenos de los ángulos direccionales de $\vec{d}$. Exprese cada uno de los ángulos direccionales en términos de $\cos^{-1}$.

2. Para $\vec{a}, \vec{b}$ fijos, defina

$$\mathscr{L}(\vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b} - \left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right)\vec{a}.$$

(a) (*4 puntos*) Verifique que $\mathscr{L}(\lambda\vec{c}) = \lambda\mathscr{L}(\vec{c})$ para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) (*4 puntos*) Verifique que $\mathscr{L}(\vec{u} + \vec{v}) = \mathscr{L}(\vec{u}) + \mathscr{L}(\vec{v})$ para cualquier par $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

(c) (*6 puntos*) Verifique que

$$\mathscr{L}\left(\vec{i}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{i} \qquad \mathscr{L}\left(\vec{j}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{j} \qquad \mathscr{L}\left(\vec{k}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{k}.$$

3. (*6 puntos*) Calcule la distancia entre el punto $P_1(1, 1, 5)$ y la recta ℓ parametrizada por

$$\ell : \quad \vec{r}\,(t) = \langle 1, 3, 0 \rangle + t\,\langle 1, -1, 2 \rangle\,.$$

4. (*6 puntos*) Encuentre la ecuación vectorial parametrizada $\vec{r}(t)$ de la recta que pasa a través del punto $P(3, -4, 5)$ y cuya dirección es el vector $\overrightarrow{PQ}$, donde Q es el punto $Q(2, -1, 7)$.

5. (*6 puntos*) Evalúe $\vec{f}\,'(t)$, si $\vec{f}(t) = \left\langle \ln(t^4+3), \cos(5t), e^{t^4+t^2} \right\rangle$.

6. (*6 puntos*) Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \vec{r}(t)\ dt$, si $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{t}{1+t^2}, \sec^2(t), e^{3t} \right\rangle$.

7. (*6 puntos*) Sean $\vec{g}, \vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos funciones vectoriales. Asumiendo la regla de diferenciación para un producto cruzado de funciones vectoriales (i.e. la regla del producto), verifique que

$$\left(\vec{g} \times \vec{f}\right)'(t) = -\left(\vec{f} \times \vec{g}\right)'(t).$$

8. (*6 puntos*) Encuentre la ecuación del plano determinado por los puntos $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,-2,-1)$ y $P_3(0,2,1)$.

9. Considere la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \langle t, 2t, t^2 \rangle$.

   (a) (*4 puntos*) Encuentre, para toda t, al vector tangente unitario $\vec{T}(t)$.

   (b) (*4 puntos*) Encuentre, para toda t, al vector normal principal $\vec{N}(t)$.

   (c) (*4 puntos*) Encuentre la ecuación, en términos de x, y, z, del plano osculador en el punto en la curva cuando $t = 2$.

10. (*6 puntos*) Encuentre la longitud de la curva determinada por $\vec{r}(t) = \left\langle t, 0, \frac{2}{3}t^{3/2} \right\rangle$ desde $\vec{r}(0)$ hasta $\vec{r}(8)$.

11. (*6 puntos*) Encuentre la curvatura de la curva

$$C: \quad \vec{r}\,(t) = \langle 3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 4t \rangle\,,$$

en el punto cuando $t = \pi$.