Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 4

Para el cuarto examen los estudiantes deben saber:

1. Sumas de Riemann.
2. Integral definida y áreas bajo una curva.
3. Teorema Fundamental del Cálculo 1 & 2.
4. Método de sustitución.
5. Promedio de una función en un intervalo dado.
6. Teorema del Valor Medio de Integrales.
7. Uso de simetría para la evaluación de integrales.
8. Áreas entre dos o más curvas.
9. Volumenes de sólidos de revolución.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 4

Nota: Es sumamente recomendable que trabaje los ejercicios asignados para cada sección. Los examenes viejos se deben ver como práctica adicional.

1. Encuentre las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2+x+1}{x^5}\right) dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)(\sin^2(x)+1)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \left(\tan^2(x)\sec^2(x)\right) dx$ (e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx$

   (g) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2+1)(2x+1)\,dx$

2. Suponga que $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,dx = 12$. Encuentre $\displaystyle\int_1^2 x^2 f(x^3)\,dx$.

3. Una función $f(x)$ continua en $[0,6]$ tiene la propiedad que $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 4$, $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx = 8$ y $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 10$. Encuentre $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$.

4. Encuentre las siguientes derivadas:

   (a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x \sin^3(z)\,dz$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \cos(t^2)\,dt$ (c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{dt}{1+t^2}$ (d) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_2^{20} \frac{dt}{1+t^4}$

   (e) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3+x+1} \frac{1+\sin(t)}{1+t^2}\,dt$

5. En este ejercicio vamos a evaluar $\int_0^2 (x^2 + x + 1)\, dx$ usando sumas de Riemann.

   (a) Si dividimos el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos iguales, entonces $\Delta x =$____ .

   (b) En este caso, la partición $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ está dada por:

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{\_\_\_\_} \\ x_1 &= \text{\_\_\_\_} \\ x_2 &= \text{\_\_\_\_} \\ &\vdots \\ x_i &= \text{\_\_\_\_} \\ &\vdots \\ x_n &= \text{\_\_\_\_} \end{aligned}$$

   (c) Si escojemos $\bar{x}_i = x_i$, entonces la suma de Riemann $R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x =$____________.

   (d) Utilice las identidades $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para simplificar R_P y calcule $\int_0^2 (x^2 + x + 1)\, dx$ evaluando el límite

$$\lim_{n\to\infty} R_P.$$

6. Utilice el hecho de que

$$\frac{x}{(x^2+1)^2} \leq \frac{x}{(x^3+1)^2}$$

   para toda x en $[0, 1]$ para justificar que

$$\frac{1}{4} \leq \int_0^1 \frac{x}{(x^3+1)^2}\, dx.$$

   ¿Qué toerema usó?

7. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \frac{x^3 + x}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$ en $[0, 2]$.

8. Suponga que una varilla caliente está a lo largo del intervalo $0 \leq x \leq 8$. Si la temperatura en los puntos de la varilla está dada por $T(x) = 8x(8 - x)$, ¿cuál es la temperatura promedio de la varilla?

9. Encuentre todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales en el intervalo dado.

   (a) $f(x) = 1 - x^2$ en $[-4, 3]$.

   (b) $f(x) = x(2 - x)$ en $[0, 2]$.

10. Dibuje la región R acotada por las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = 2x + 1$.

   (a) Evalúa el área de R.

   (b) Suponga que la región R se hace girar alreadedor del eje de x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

   (c) Suponga que la región R se hace girar alreadedor del eje de $y = -1$. Encuentre el volumen del sólido resultante.

11. Dibuja la región Ω acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ y $x = 0$.

    (a) Evalúa el área de Ω.

    (b) Suponga que la región Ω se hace girar alreadedor del eje de y. Encuentre el volumen del sólido resultante.