Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 4

Para el cuarto examen los estudiantes deben saber:

1. Teoremas con nombres.
2. Resolver ecuaciones diferenciales elementales (sec. 3.9).
3. Sumas de Riemann.
4. Integral definida y áreas bajo una curva.
5. Teorema Fundamental del Cálculo 1 & 2.
6. Método de sustitución.
7. Teorema del Valor Medio de Integrales.
8. Uso de simetría para la evaluación de integrales.
9. Áreas entre dos o más curvas.
10. Volúmenes de sólidos de revolución.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 4

Nota: Es recomendable que trabaje los ejercicios asignados para cada sección.

1. Suponga que $f(x)$ es una función tal que $f'''(x) = \sin(x)$, $f''(0) = 3$, $f'(0) = 2$ y $f(0) = 3$. Encuentre $f(x)$.
2. Resuelva los siguientes ecuaciones diferenciales:
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2y + 8yx, \qquad y(1) = 1.$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = y$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = (1+y)\cos(x), \qquad y(\pi) = 2.$
   (d) $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{y^2}$
3. Suponga que $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 18$. Encuentre $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(3x+2)\,dx$.
4. Una función $f(x)$ continua en $[0,8]$ tiene la propiedad que $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = 10$, $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,dx = 8$ y $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx = 6$. Encuentre $\displaystyle\int_0^1 f(4x+2)\,dx$.
5. Utilice sumas de Riemann para evaluar $\displaystyle\int_1^3 \left(3x^2 + x\right)\,dx$.

   Nota: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ y $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

CONTINUA EN LA PRÓXIMA PÁGINA

6. Encuentre las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 + \frac{3}{x^2}\right) dx$ (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x}{x^8+x^2+1} dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin^3(x) + \sin(x) + 1)\cos(x)\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 x^4 e^{x^5}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2+1)(2x+1)\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{50} |\sin(x)|\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^8 x\sqrt{x+1}\, dx$

7. Encuentre las siguientes derivadas:

(a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x \sin^3(z)\, dz$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$ (c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x}^x \frac{dt}{1+t^2}$ (d) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_2^{20} \frac{dt}{1+t^4}$

(e) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{e^x} \frac{1+\sin(t)}{1+t^2}\, dt$

8. No es difícil demostrar que

$$\frac{e^{-x}}{x^2+1} \leq e^{-x}$$

para toda x en $[0,1]$. Utilice esto y el hecho de que $\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ es decreciente para demostrar que

$$\frac{1}{2e} \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^2+1}\, dx \leq \frac{e-1}{e}.$$

¿Qué toerema(s) usó?

9. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^4+2x^2+1}$ en $[0,2]$.

10. Suponga que un tanque de agua de 5000 litros tarda 10 minutos en vaciarse y que después de t minutos, la cantidad de agua que queda en el tanque es $V(t) = 50(10-t)^2$ litros. ¿Cúal es la cantidad promedio de agua en el tanque durante el tiempo en que se vacía? **(7 pts)**

11. Encuentre todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales en el intervalo dado.

(a) $f(x) = 1 - x^2$ en $[-4,3]$.

(b) $f(x) = x(2-x)$ en $[0,2]$.

12. Suponga que R es la región entre la curva $y = x^2$ y el eje x para $0 \leq x \leq 2$.

(a) Encuentre el volumen del sólido que resulta al hacer rotar la región R alrededor del eje de x.

(b) Encuentre el volumen del sólido que resulta al hacer rotar la región R alrededor de la recta $x = 3$.

CONTINUA EN LA PRÓXIMA PÁGINA

13. Dibuje la región R acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x + 2$.
    (a) Encuentre el área de R.
    (b) Suponga que la región R se hace rotar alrededor del eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

14. Dibuje la región Ω acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ y $x = 0$.
    (a) Encuentre el área de Ω.
    (b) Suponga que la región Ω se hace rotar alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido resultante.