Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 4

Para el cuarto examen los estudiantes deben saber:

1. Teoremas con nombres.
2. Como encontrar antiderivadas.
3. Resolver ecuaciones diferenciales elementales (sec. 3.9).
4. Sumas de Riemann.
5. Integral definida y áreas bajo una curva.
6. Teorema Fundamental del Cálculo 1 & 2.
7. Método de sustitución.
8. Teorema del Valor Medio de Integrales.
9. Uso de simetría para la evaluación de integrales.
10. Áreas entre dos o más curvas.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 4

Nota: Es sumamente recomendable que trabaje los ejercicios asignados para cada sección. Los examenes viejos se deben ver como práctica adicional.

1. Encuentre las siguientes antiderivadas:

   (a) $\displaystyle\int \left(x^3 + 3x^2 + x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$ (b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)^2}{x}\, dx$

   (d) $\displaystyle\int \left(x\sqrt{x} + x^{1/4} + \frac{1}{x^5}\right) dx$ (e) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\, dx$ (f) $\displaystyle\int \sin(3x+2)\, dx$

   (g) $\displaystyle\int \left(\cos^3(x) + 4\cos(x) + 2\right)\sin(x)\, dx$

2. Suponga que $f(x)$ es una función tal que $f'''(x) = -e^{-x}$, $f''(0) = 3$, $f'(0) = 3$ y $f(0) = 2$. Encuentre $f(x)$.

3. Resuelva los siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = -2y^2x + 3y^2x^2$.

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $\quad y(1) = 1$.

CONTINUA EN LA PROXIMA PAGINA

4. En este ejercicio vamos a evaluar $\int_0^2 (2x+1)\,dx$ usando sumas de Riemann. Notaciones según el libro.

   (a) Si dividimos el intervalo $[0,2]$ en n subintervalos iguales, entonces $\Delta x =$____ .

   (b) En este caso, la partición $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ está dada por:

$$\begin{aligned} x_0 &= \underline{\qquad} \\ x_1 &= \underline{\qquad} \\ x_2 &= \underline{\qquad} \\ &\vdots \\ x_i &= \underline{\qquad} \\ &\vdots \\ x_n &= \underline{\qquad} \end{aligned}$$

   (c) Si escojemos $\bar{x}_i = x_i$, entonces la suma de Riemann $R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x =$____________.

   (d) Utilice la identidad $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para simplificar R_P y calcule $\int_0^2 (2x+1)\,dx$ evaluando el límite

$$\lim_{n\to\infty} R_P.$$

5. Suponga que $\int_1^8 f(x)\,dx = 12$. Encuentre $\int_1^2 x^2 f(x^3)\,dx$.

6. Una función $f(x)$ continua en $[0,6]$ tiene la propiedad que $\int_0^6 f(x)\,dx = 4$, $\int_2^6 f(x)\,dx = 8$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$. Encuentre $\int_2^4 f(x)\,dx$.

7. Encuentre las siguientes integrales definidas:

   (a) $\int_1^2 \left(x^3 + \frac{3}{x^2}\right) dx$ (b) $\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ (c) $\int_{-3}^{3} \frac{x}{x^4+1}dx$

   (d) $\int_0^{\pi/4} (\sin^3(x) + \sin(x) + 1)\cos(x)\,dx$ (e) $\int_0^1 x^4 e^{x^5}\,dx$ (f) $\int_{-1}^{2} (x^2+1)(2x+1)\,dx$

   (g) $\int_0^{50\pi} |\cos(x)|\,dx$ (h) $\int_0^8 x\sqrt{x+1}\,dx$

8. Encuentre las siguientes derivadas:

   (a) $\frac{d}{dx}\int_1^x \sin^3(z)\,dz$ (b) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ (c) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$ (d) $\frac{d}{dx}\int_2^{20} \frac{dt}{1+t^4}$

   (e) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{e^x} \frac{1+\sin(t)}{1+t^2}\,dt$

CONTINUA EN LA PROXIMA PAGINA

9. Utilice el hecho de que

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^3+1}$$

para toda x en $[0,1]$ para justificar que

$$\frac{\ln(2)}{2} \leq \int_0^1 \frac{x}{x^3+1}\, dx.$$

¿Cúal propiedad de las integrales utilizó?

10. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^4+2x^2+1}$ en $[0,2]$.

11. Encuentre todos los valores de c que satisfacen el teorema del valor medio para integrales en el intervalo dado.

    (a) $f(x) = 1 - x^2$ en $[-4, 3]$.

    (b) $f(x) = x(2-x)$ en $[0, 2]$.

12. Un objeto se mueve a lo largo de una recta, de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ pies por segundo. Encuentre el desplazamiento y la distancia total que recorre el objeto para $0 \leq t \leq 9$.

13. Dibuja la región R acotada por las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = 2x + 1$. Evalúa el área de R.

14. Dibuja la región Ω acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ y $x = 0$. Evalúa el área de Ω.