

Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 2

Para el segundo examen los estudiantes deben saber:

1. Definición de la derivada.
2. Definición de la recta tangente a una curva en un punto dado.
3. Proveer la recta tangente a una curva en un punto dado.
4. Reglas para encontrar derivadas: regla de la potencia, producto, cociente, cadena, etc.
5. Saber el enunciado de la regla del producto, cociente y cadena.
6. Saber la prueba de la regla de la suma (derivada de una suma es la suma de las derivadas) y la regla del producto.
7. Derivadas de funciones trigonométricas.
8. Derivadas de orden superior.
9. Saber la relación (y aplicarla) entre la posición, velocidad y aceleración de un objeto que se mueve en una línea recta.
10. Derivación implícita.
11. Resolver problemas de tasas de cambio relacionadas.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 2

1. Encuentre la derivada de $f(x) = x^{-2}$ usando la definición (límite) de la derivada.
2. Demuestre que $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Demuestre que $g(x) = x|x|$ es una función diferenciable.
3. Suponga que $f(x) = x^3 - 6x + 1$. Haga lo siguiente:
 - (a) Encuentre todos los puntos en el plano cartesiano donde la recta tangente a $f(x)$ es horizontal.
 - (b) Encuentre todos los puntos en el plano cartesiano donde la recta tangente a $f(x)$ es paralela a la recta $y = 3x + 7$.
4. Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

(a) $x \tan(x)$ (b) $\frac{x^3 + x^2 + 2}{3x^3 + 3\pi^2x + 1}$ (c) $\sin(\sec(x))$

(d) $1 + \tan(x) + \sec^2(x)$ (e) $\frac{\tan(x^3)}{1 + \sin(x)}$ (f) $\frac{x \sec(4x + 3)}{1 + x^2 \tan(4x)}$

5. Encuentre

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 + \frac{d}{dx} (x \sin(x)) \right).$$

6. Considere $f(x) = \cos(5x)$. Calcule $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ y $f^{(4)}(0)$. ¿Ve algún patrón? ¿Cuál es la fórmula para $f^{(n)}(0)$ donde n es un entero positivo?

7. Suponga que $f(x)$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x < 2 \\ ax^3 + bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

y que la derivada de $f(x)$ es continua. Encuentre las constantes a y b .

8. Suponga que $f(x)$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < 2 \\ 2x + 4, & x \geq 2. \end{cases}$$

Demuestre que $f(x)$ es continua, pero no diferenciable.

9. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables. Más aún, suponga que $f'(1) = 2$, $g'(1) = 3$, $f(1) = 3$ y $g(1) = 1$.

(a) Si $b(x) = \frac{f(x^3)}{g(x)}$, entonces $b'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) Si $c(x) = f(xg(x))$, entonces $c'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(c) Encuentre el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^4) - 3}{x - 1}$$

10. Un objeto que se lanza directamente hacia arriba está a una altura de $s = -16t^2 + 48t + 256$ pies después de t segundos.

(a) ¿Cuál es su velocidad inicial?

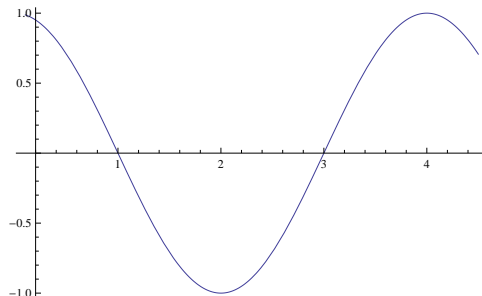
(b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

(c) ¿Cuál es la altura máxima?

(d) ¿Cuándo llega al suelo?

(e) ¿A que velocidad llega al piso?

11. Suponga una partícula se mueve en el eje de x y su velocidad $v(t)$ (t en segundos) está dada por la siguiente función:



(a) ¿Cuándo la partícula se mueve hacia la derecha? ¿Cuándo se mueve hacia la izquierda?

(b) ¿Cuándo la aceleración es cero?

(c) ¿Cuándo la aceleración es positiva? ¿Cuándo la aceleración es negativa?

12. Considere la siguiente función implícita:

$$y^3 x^2 + \tan(y)x = x^2.$$

Encuentre $\frac{dy}{dx}$.

13. Considere la siguiente función implícita:

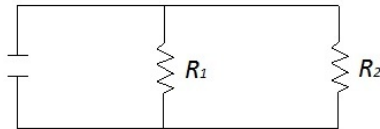
$$xy^2 + x^2 = xy.$$

- (a) Encuentre la recta tangente a la curva en el punto $(-2, -1)$.
- (b) Demuestre que la recta tangente a la curva en el punto $(2/9, 2/3)$ es perpendicular a la recta hallada en (a).

14. Si dos resistores con resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo (mire la figura), entonces la resistencia total R , medida en ohms (Ω), está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Si R_1 y R_2 están incrementando a razón de $4/10 \Omega/s$ y $9/10 \Omega/s$ respectivamente, ¿qué tan rápido está R cambiando cuando $R_1 = 2 \Omega$ y $R_2 = 3 \Omega$? **(10 pts)**



15. Un globo esférico se está inflando a razón de 12 pulgadas cubicas por segundo. ¿Cuál es el radio del globo cuando su área de superficie está incrementando a razón de 5 pulgadas cuadradas por segundo?

16. Dos barcos parten desde el mismo puerto en una isla, uno va dirección norte a 24 nudos y el otro con rumbo este a 30 nudos. El barco con dirección norte salió a las 9:00 am y el otro dejó el puerto a las 11:00 am. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 pm? *Sugerencia:* sea $t = 0$ a las 11:00 am.