Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

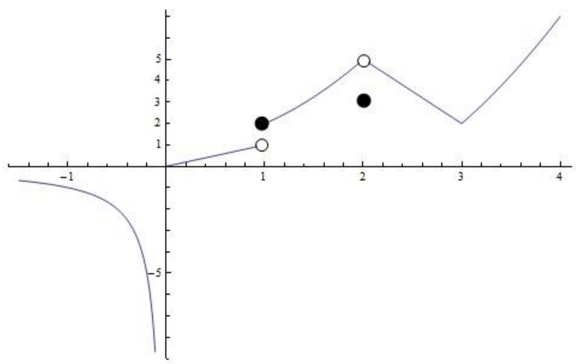
Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 1

Para el primer examen los estudiantes deben saber:

1. Definición del límite.
2. Probar límites de funciones usando $\varepsilon - \delta$
3. Evaluar límites.
4. Enunciar y aplicar el Teorema del Emparedado.
5. La definición de continuidad en un punto.
6. Diferentes tipos de discontinuidad.
7. Encontrar asíntotas vérticales y horizontales.
8. Enunciar y aplicar el Teorema del Valor Intermedio.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 2

1. Considere la función $f(x)$ en la siguiente figura. Encuentre (si existe) lo siguiente: **(10 pts)**



(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x) =$

(d) $f(2) =$

(e) $\lim_{x\to 3} f(x) =$

2. Pruebe de forma rigurosa $(\varepsilon - \delta)$ los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to 1} 4x + 2 = 6$

   (b) $\lim_{x\to 2} x^2 - x + 2 = 4$

   (c) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

3. En los siguientes problemas se le da una función y números L, c y $\varepsilon > 0$. Encuentre un $\delta > 0$ tal que para toda x que satisface $0 < |x - c| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$.

   (a) $f(x) = 4x + 3, \quad L = 7, \quad c = 1, \quad \varepsilon = 0.01$

   (b) $f(x) = x^2 + x + 1, \quad L = 13, \quad c = 3, \quad \varepsilon = 1/3$

   (c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4, \quad L = 3, \quad c = -1, \quad \varepsilon = .005$

4. Encuentre los siguientes límites

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ (b) $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + 3x + 2}$ (c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x+7} - 4}{x^2 - 9}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(x^2\right)}{\sin(3x)}$ (f) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2 - x}{|x - 2|}$

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x^2) + x\cos(x) - x}{x^2}$ (i) $\lim_{x\to 2^+} \frac{4 + x^2}{4 - x^2}$

5. Se puede probar que para valores de x suficientemente cerca a 0 tenemos

$$1 - \frac{x^2}{3} \leq \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \leq 1 - \frac{x^2}{6}.$$

   Utilice esta información para encontrar

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2}.$$

6. Suponga que

$$\lim_{t\to 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln(2).$$

   Utilice ésto y las propiedades del límite para hallar

$$\lim_{t\to 0} \frac{2^{x+t} - 2^x}{t}.$$

7. Utilice el Teorema del Emparedado para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \sin(7/x^3) = 0.$$

   Ayuda: Recuerde que la función seno es acotada.

8. Encuentre los valores de a y b que hacen a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \\ ax^2+bx-1, & 1 \leq x < 2 \\ x^3+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

continua.

9. Utilice el Teorema del Valor Intermedio para explicar por qué la ecuación $\tan(x) = 1 - x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, \pi/4)$.

10. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones:

    (a) $\dfrac{2x-1}{x+6}$.

    (b) $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-x-2}$.

    (c) $2 + \dfrac{\sin(4x)}{\sin(2x)}$.

11. ¿Es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

continua en $x = 1$? Utilice límites para contestar la pregunta. Si la función es discontinua en $x = 1$, entonces indique el tipo de discontinuidad.

12. ¿Es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 2 \\ 8-x, & x \geq 2 \end{cases}$$

continua en $x = 2$? Utilice límites para contestar la pregunta. Si la función es discontinua en $x = 2$, entonces indique el tipo de discontinuidad.

13. **Contracción de Lorenz.** En la teoría de la relatividad, la longitud de un objeto, digamos un cohete, parece variar a los ojos de un observador dependiendo de la velocidad a la que viaja el objeto con respecto a ese observador. Si éste mide la longitud del cohete en reposo L_0, entonces a una velocidad v la longitud parecerá ser

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta ecuación es la fórmula de contracción de Lonrentz. Aquí, c es la rapidez de la luz en el vacío, alrededor de 3×10^8 m/seg. ¿Qué le sucede a L cuando v aumenta? Determine $\lim_{v \to c^-} L$. ¿Por qué es necesario el límite por la izquierda?