Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Facultad de Ciencias Naturales
Departamento de Matemáticas
San Juan, Puerto Rico

Tópicos a cubrir en MATE 3151 - Examen 1

Para el primer examen los estudiantes deben saber:

1. La definición del límite.
2. Probar límities de funciones usando $\varepsilon - \delta$.
3. Aplicar el Teorema principal de los límites.
4. Evaluar límites (incluyendo límites al infinito e infinitos).
5. Enunciar y aplicar el Teorema del Emparedado.
6. La definición de continuidad en un punto.
7. Diferentes tipos de discontinuidad.
8. Encontrar asíntotas vérticales y horizontales de una función.
9. Enunciar y aplicar el Teorema del Valor Intermedio.
10. Definición de la derivada.

Ejercicios de práctica para MATE 3151 - Examen 1

1. Pruebe de forma rigurosa ($\varepsilon - \delta$) los siguientes límites:
   (a) $\lim_{x\to 2} 2x^2 + x + 1 = 11$.
   (b) $\lim_{x\to 1} 5x + 3 = 8$.
   (c) $\lim_{x\to 2} x^3 + x + 2 = 12$.
2. Evalúe los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{2+x+x^2}{x^3-x-1}$ (b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$ (c) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x^2+8x+15}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(2x)}{\sin(x^2)}$ (f) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x^2+7}-5}{x-3}$

   (g) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+x^2+7x+3}{2x^3-4x^2+x+1}$ (h) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (i) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|2-x|}$

   (j) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)-\sin(x-1)}{x-1}$ (k) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$ (l) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

3. Suponga que es cierto que para toda x suficientemente cerca a 0 tenemos la desigualdad

$$0 \le \left| \frac{1-\cos(x)}{x} \right| \le \frac{|x|}{2}.$$

   Utilize ésto para encontrar $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

4. Encuentre los valores de a y b que hacen a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x < 0 \\ x^3 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

   continua.

5. Utilize el Teorema del Valor Intermedio para explicar por qué la ecuación $\cos(x) = x - 1$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, \pi/2)$.

6. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones:

   (a) $\dfrac{x}{x+2}$.

   (b) $\dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 - x - 2}$.

   (c) $2 + \dfrac{\sin(x)}{x}$.

   Grafique (a) y (b).

7. Utilize la definición de la derivada para encontrar:

   (a) $f'(2)$ donde $f(x) = x^2 + 1$.

   (b) $g'(x)$ donde $g(x) = \sqrt{x}$.

   (c) $h'(x)$ donde $h(x) = x^{-2}$.

8. ¿Es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3 - x, & x \geq 1 \end{cases}$$

   continua en $x = 1$? Utilize límites para contestar la pregunta. Si la función es discontinua en $x = 1$, entonces indique el tipo de discontinuidad.

9. ¿Es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 2 \\ 8 - x, & x \geq 2 \end{cases}$$

   continua en $x = 2$? Utilize límites para contestar la pregunta. Si la función es discontinua en $x = 2$, entonces indique el tipo de discontinuidad.

10. Utilize el Teorema del Emparedado para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x) = 0.$$

   Ayuda: Recuerde que la función coseno es acotada.