Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3151

Primer Examen

26 de febrero de 2014

Nombre:

No. de estudiante: ______ Profesor: ______ Sección: ______

Instrucciones

Las reglas para esta prueba son las siguientes:

1. Esta prueba consiste de dos partes: una de selección múltiple (15 problemas) y otra de respuesta libre (6 problemas). Respuesta libre <u>no quiere decir que es opcional</u>, hay que contestar todas las preguntas.
2. Para obtener crédito en los ejercicios de respuesta libre, debe mostrar todo su trabajo.
3. NO SE PERMITE EL USO DE CELULARES.
4. NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORAS.
5. NO SE PERMITE EL USO DE APARATOS ELECTRÓNICOS (IPADS, IPODS, ETC.) QUE PUEDAN INTERRUMPIR A SUS COMPAÑEROS.

Como prueba de que usted ha leído y entendido las instrucciones, favor de firmar en la caja de abajo.

Firma:

Página	Puntos posibles	Puntuación obtenida
2	12	
3	12	
4	9	
5	12	
6	20	
7	24	
8	22	
Total:	111	

Parte I. Selección Múltiple

1. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan(7x)}{11x} \right).$

   A. $L = -\frac{7}{11}$
   B. $L = +\frac{7}{11}$
   C. $L = -\frac{4}{11\pi}$
   D. $L = +\frac{4}{11\pi}$
   E. El límite no existe.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

2. (3 puntos) Encuentre, en la forma $y = mx+b$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3+11x$, en el punto $(2, 30)$.

   A. $y = 30x - 30$
   B. $y = -30x + 90$
   C. $y = 23x - 16$
   D. $y = -23x + 76$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

3. (3 puntos) Considere la función $f(x) = \begin{cases} 2x + M & \text{si} \quad x < 5 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$. ¿Qué valor debe ser M para que f sea continua en $x = 5$?

   A. $M = 26$
   B. $M = 16$
   C. $M = \frac{13}{5}$
   D. $M = -10$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

4. (3 puntos) Considere la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ definida sobre el intervalo $I = [3, 24]$. Encuentre la tasa promedio de cambio, con respecto a x, de la función $y = f(x)$ sobre el intervalo I.

   A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{1}{7}$
   B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{7}$
   C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{23}{21}$
   D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{23}{21}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

5. (3 puntos) Dado que, $y = \left(5x^2 - 7\right) \cdot \left(4x^7 + 10\right)$. Encuentre y'.
   A. $y' = (10x) \cdot \left(28x^6\right)$
   B. $y' = 20x^9 - 28x^7 + 50x^2 - 70$
   C. $y' = 180x^8 - 196x^6 + 100x$
   D. $y' = 180x^8 + 196x^6 - 100x$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

6. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1 - x^2}{x^2 - 4}\right)$.
   A. $L = -1$
   B. $L = +\infty$
   C. $L = -\infty$
   D. $L = -\frac{3}{8}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

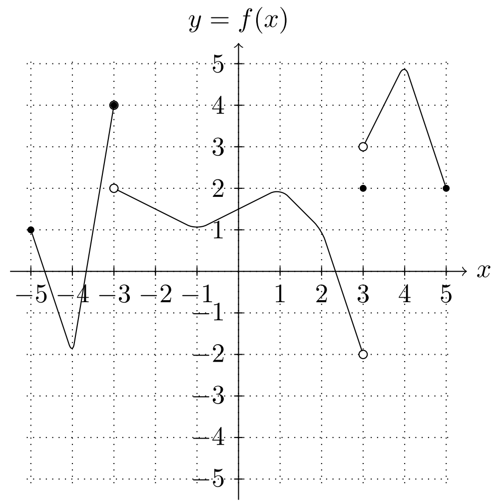
7. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\tan(7x)}{11x}\right)$.
   A. $L = -\frac{7}{11}$
   B. $L = +\frac{7}{11}$
   C. $L = -\frac{4}{11\pi}$
   D. $L = +\frac{4}{11\pi}$
   E. El límite no existe.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

8. (3 puntos) Dado que x satisface la desigualdad $|x-10| < 1$, encuentre M y N tales que $M < 3x+2 < N$.
   A. $M = 9$ y $N = 11$
   B. $M = 20$ y $N = 31$
   C. $M = 27$ y $N = 33$
   D. $M = 29$ y $N = 35$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

9. (3 puntos) Considere la siguiente gráfica de $y = f(x)$. Evalúe, si existen, los siguientes límites:

$$L = \lim_{x \to -3^+} (f(x)) \qquad M = \lim_{x \to +3^+} (f(x)).$$



A. $L = 2; \quad M = 3$

B. $L = 2; \quad M = 2$

C. $L = 2; \quad M =$ no existe

D. $L = 4; \quad M = 3$

E. $L = 4; \quad M = 2$

F. $L = 4; \quad M = -2$

---

10. (3 puntos) Dado que $\lim_{x \to 3} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 100$ y $\lim_{x \to 3} (xg(x)) = 81$. Evalúe, si existe, el siguiente límite:

$$L = \lim_{x \to 3} \left(\frac{9f(x) + 2g(x)}{18} \right).$$

A. $L = 27$

B. $L = 153$

C. $L = 300$

D. $L = \frac{11}{18}$

E. El límite no existe.

F. Ninguna de las anteriores.

---

11. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $\quad L = \lim_{x \to 3} \left(7x \left(x + \frac{1}{3} \right) \right).$

A. $L = 70$

B. $L = 96$

C. $L = 210$

D. $L = 7x^2 + \frac{7x}{3}$

E. El límite no existe.

F. Ninguna de las anteriores.

12. (3 puntos) La pendiente de la curva $f(x) = \frac{10}{x^2}$ en el punto $P(7, \frac{10}{49})$ está dada por el límite:

$$m = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\frac{10}{(7+h)^2} - \frac{10}{49}}{h} \right).$$

Evalúe m.

A. $m = -\frac{20}{343}$

B. $m = +\frac{20}{343}$

C. $m = -\frac{10}{49h(7+h)^2}$

D. $m = +\frac{10}{49h(7+h)^2}$

E. m no existe.

F. Ninguna de las anteriores.

---

13. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{2x \cos(13x)}{\operatorname{sen}(10x)} \right)$.

A. $L = +\frac{13}{5}$

B. $L = -\frac{13}{5}$

C. $L = +\frac{1}{5}$

D. $L = -\frac{1}{5}$

E. El límite no existe.

F. Ninguna de las anteriores.

---

14. (3 puntos) Dado que, $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{x}{1+x}$. Encuentre y'.

A. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$

B. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$

C. $y' = 4\sqrt{1} - \dfrac{1}{0+1}$

D. $y' = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$

E. Todas las anteriores.

F. Ninguna de las anteriores.

---

15. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to -5} \left(\dfrac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x+5} \right)$.

A. $L = \frac{1}{5}$

B. $L = -\frac{1}{5}$

C. $L = \frac{1}{25}$

D. $L = -\frac{1}{25}$

E. El límite no existe.

F. Ninguna de las anteriores.

Parte II. Respuesta Libre

16. Complete cada una de las siguientes definiciones en la caja provista.

    (a) (4 puntos)

    Definición 1 (Diferenciabilidad)**.**

    Decimos que $f(x)$ es diferenciable en $x = c$, si

    (b) (6 puntos) Enuncie el teorema del Sandwich.

    Teorema 2 (Sandwich)**.**

17. (Problema de Avalúo.) En otro curso se demuestra que $\forall x > 0$ real, $\quad 2x - \frac{4x^3}{3} \leq \operatorname{sen}(2x) \leq 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15}$.

    (a) (4 puntos) Para $x > 0$, manipule la desigualdad arriba hasta encontrar dos funciones $M(x)$ y $N(x)$ tales que $M(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{x^3} \leq N(x)$.

    (b) (6 puntos) Utilice el teorema del Sandwich, para evaluar $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{x^3} \right)$.

18. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 27x + 42}$.

(a) (6 puntos) Encuentre las asíntotas verticales de la gráfica de $y = f(x)$. Explique.

(b) (6 puntos) Encuentre las asíntotas horizontales de la gráfica de $y = f(x)$. Explique.

19. (a) (6 puntos) Evalúe, $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{2x(x+7)} \right)$.

(b) (6 puntos) Evalúe, $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{x - 3}{\sqrt{x + 22} - 5} \right)$.

20. (10 puntos) Utilizando la definición de la derivada, encuentre $f'(3)$, para la función $f(x) = \sqrt{4x + 13}$.

21. (a) (6 puntos) Simplifique,

$$\frac{d}{dx}\left[10x^2 + \frac{20}{x^2} + 30\sqrt{x}\right].$$

(b) (6 puntos) Simplifique,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3 + 1}{x^2 + 3}\right].$$