Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3151

Cuarto Examen

10 de diciembre de 2012

Nombre:

No. de estudiante: ______________ Profesor: ______________ Sección: ________

Instrucciones

Las reglas para esta prueba son las siguientes:

1. Esta prueba consiste de dos partes: una de selección múltiple (12 problemas) y otra de respuesta libre (6 problemas). Respuesta libre no quiere decir que es opcional, hay que contestar todas las preguntas.
2. Para obtener crédito en los ejercicios de respuesta libre, debe mostrar todo su trabajo.
3. NO SE PERMITE EL USO DE CELULARES.
4. NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORAS.
5. NO SE PERMITE EL USO DE APARATOS ELECTRÓNICOS (IPADS, IPODS, ETC.) QUE PUEDAN INTERRUMPIR A SUS COMPAÑEROS.

Como prueba de que usted ha leído y entendido las instrucciones, favor de firmar en la caja de abajo.

Firma:

Página	Puntos posibles	Puntuación obtenida
2	12	
3	12	
4	12	
5	24	
6	24	
7	24	
Total:	108	

Parte I. Selección Múltiple

1. (3 puntos) Suponga que g es continua sobre los números reales, que $\int_{-2}^{2} g(z)\ dz = 0$ y que $\int_{-2}^{7} g(z)\ dz = 4$. Encuentre $\int_{7}^{2} g(z)\ dz$.

   A. 4 C. 8 E. Todas las anteriores.

   B. -4 D. -8 F. Ninguna de las anteriores.

---

2. (3 puntos) Evalúe la integral utilizando la sustitución sugerida.

$$\int x^4 \left(x^5 - 4\right)^4\ dx \quad ; \quad u = x^5 - 4.$$

   A. $\frac{1}{5}\left(x^5 - 4\right)^5 + C$

   B. $\frac{1}{25}x^{25} - 4 + C$

   C. $\frac{1}{15}\left(x^5 - 4\right)^3 + C$

   D. $\frac{1}{25}\left(x^5 - 4\right)^5 + C$

   E. Todas las anteriores.

   F. Ninguna de las anteriores.

---

3. (3 puntos) Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{20} \left(k^2 + 3\right)$.

   A. 403 C. 2870 E. Todas las anteriores.

   B. 463 D. 2930 F. Ninguna de las anteriores.

---

4. (3 puntos) Encuentre el área de la región acotada por la gráfica de $y = \dfrac{3}{x^3}$ y el eje de x en el intervalo $[1, 3]$.

   A. 3 C. $\frac{4}{3}$ E. Todas las anteriores.

   B. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ F. Ninguna de las anteriores.

5. (3 puntos) Sea Ω la región acotada por las gráficas de

$$y = 8; \quad y = x^2 + 2x.$$

¿Cuál de las siguientes integrales representa el área de Ω?

A. $\int_{-4}^{2} (x^2 + 2x) - 8 \; dx$

B. $\int_{-4}^{2} 8 - (x^2 + 2x) \; dx$

C. $\int_{0}^{2} (x^2 + 2x) - 8 \; dx$

D. $\int_{0}^{2} 8 - (x^2 + 2x) \; dx$

E. Todas las anteriores.

F. Ninguna de las anteriores.

---

6. (3 puntos) Exprese el límite a continuación como una integral definida:

$$\lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{c_k^6} \cdot \Delta x_k \right),$$

donde $\mathscr{P}$ es una partición del intervalo $[5, 6]$.

A. $\displaystyle\int_{1}^{n} \frac{6}{x^6} \; dx$

B. $\displaystyle\int_{5}^{6} \frac{6}{x} \; dx$

C. $\displaystyle\int_{6}^{5} \frac{6}{x^6} \; dx$

D. $\displaystyle\int_{5}^{6} \frac{6}{x^6} \; dx$

E. Todas las anteriores.

F. Ninguna de las anteriores.

---

7. (3 puntos) Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = -2x + 2$ sobre el intervalo $[-2, 1]$.

A. 9

B. 6

C. 1

D. 3

E. Todas las anteriores.

F. Ninguna de las anteriores.

---

8. (3 puntos) Dado que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 7$ y que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = 4$, encuentre el valor de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (5a_k + 10b_k)$.

A. 75

B. -15

C. 15

D. 90

E. Todas las anteriores.

F. Ninguna de las anteriores.

9. (3 puntos) Evalúe la integral $\displaystyle\int_0^{1/9} t^2\ dt$.

   A. $-\frac{1}{2187}$
   B. 2187
   C. $-\frac{1}{9}$
   D. $\frac{1}{9}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

10. (3 puntos) Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región acotada por las gráficas de

$$y = x; \quad y = 0; \quad x = 2; \quad x = 4.$$

alrededor del eje de x.

   A. 6π
   B. $\frac{2\pi}{3}$
   C. 10π
   D. $\frac{56\pi}{3}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

11. (3 puntos) Evalúe la integral definida representada por el límite a continuación:

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \sec^2(c_k) \cdot \Delta x_k \right),$$

donde $\mathscr{P}$ es una partición del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

   A. -2
   B. 2
   C. $\sqrt{3} - 1$
   D. $\sqrt{3} + 1$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

12. (3 puntos) Evalúe la integral $\displaystyle\int_{-2}^{4} 6x^5\ dx$.

   A. 4032
   B. 24192
   C. 240
   D. 1024
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

Parte II. Respuesta Libre

13. (12 puntos) Para la función $f(x) = \sqrt{x}$ definida sobre el intervalo $[0, 9]$, encuentre el valor de c (o los valores) que satisface (o satisfacen) la conclusión del Teorema de la Media para integrales.

14. (Problema de Avalúo.)

(a) (6 puntos) Evalúe $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{1+t^2}\, dt\right]$.

(b) (6 puntos) Suponga que $f(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ y que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x).$$

Evalúe $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

15. Suponga que $f(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $\int_1^7 f(x)\, dx = 18$.

(a) (4 puntos) Evalúe

$$\int_4^{10} f(x-3)\, dx.$$

(b) (8 puntos) Evalúe

$$\int_2^{13} f\left(\frac{6x-1}{11}\right)\, dx.$$

16. (a) (6 puntos) Evalúe

$$\int \frac{100}{(5x+10)^3}\, dx.$$

(b) (6 puntos) Evalúe

$$\int 2x^5 \sec^2(x^6+1)\, dx.$$

17. (12 puntos) Encuentre al área de la región acotada por las gráficas de

$$f(x) = 18 + x - x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 3x + 12.$$

18. (12 puntos) Sea Ω la región acotada por las gráficas de

$$y = x^2 \qquad \text{y} \qquad y = 2x.$$

Encuentre el volumen del sólido que se obtiene al girar la región Ω alrededor del eje de x.