



Universidad de Puerto Rico
Departamento de Matemáticas
MATE 3023 Repaso 2(Lógica)

Apellidos: _____
No. Estudiante: _____

Nombre: _____
Sección: _____

Conceptos Básicos de Lógica: Lógica es el estudio de como razonar correctamente.

En la matemática nos encontramos con frecuencia con oraciones o enunciados. Un enunciado es una oración declarativa que es cierta o falsa pero no ambas. Hay oraciones simples y oraciones compuestas. Las oraciones simples son aquellas que no se pueden descomponer en otros enunciados. Los enunciados compuestos son la combinación de dos o más enunciados simples. Ejemplos de enunciados :

1. Hoy es jueves. (simple)
2. $3+4=10$ (simple)
3. Hoy es jueves y $3+4=10$. (compuesto)
4. $3<0$ ó $5+1=6$ (compuesto)

Las palabras o frases que se usan para formar enunciados compuestos se llaman conectivos. Algunos de los conectivos que usamos son: y, ó, si...entonces..., si y sólo si, no, etc. La oración “Hoy es jueves y $3+4=10$ ” es un enunciado compuesto formado por dos oraciones simples y la letra y. En general si p y q representan dos oraciones entonces podemos formar la oración compuesta p y q que se le llama la conjunción de p y q . La conjunción de p y q se escribe en forma simbólica como: $p \wedge q$. Decimos que la conjunción de p y q , ($p \wedge q$), es cierta si p es cierta y q es cierta.

Tabla de veracidad de $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
cierto	cierto	cierto
cierto	falso	falso
falso	cierto	falso
falso	falso	falso

En la tabla de veracidad las posibilidades lógicas de p y q en cada fila son: cierto, cierto; cierto, falso; falso, cierto; falso, falso;

Si juntamos las oraciones p y q con la letra “ó” formamos la oración compuesta $p \vee q$, la cual llamamos la disyunción de p y q y la representamos simbólicamente como $p \vee q$. Decimos que la disyunción de p y q , $(p \vee q)$, es cierta si por lo menos una de las dos oraciones es cierta.

Tabla de veracidad de $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
cierto	cierto	cierto
cierto	falso	cierto
falso	cierto	cierto
falso	falso	falso

I. Indica cual de los siguientes enunciados es cierto

1. San Juan es la capital de Puerto Rico y está en el centro de la isla.
2. $5 < 9$ ó $-2 > 3$
3. 1 es un número primo y 2 es par.
4. 7 es positivo ó 7 es negativo
5. Juan es simpático.

Dado el enunciado p podemos formar el enunciado compuesto, **la negación de p** , que lo representamos como p' . Si p es cierto entonces p' es falso y viceversa.

Tabla de veracidad de p'

p	p'
cierto	falso
falso	cierto

Oraciones Abiertas:

Supongamos que el conjunto $D = \{Bogotá, San Juan, Habana, Caracas\}$. Sea x un elemento cualquiera de D . Considera la oración “ x es la capital de Venezuela”.

Esta oración ni es cierta ni es falsa. Depende de qué elemento de D sustituimos por x . A esta oración le llamamos oración abierta. Al conjunto D le llamamos **conjunto de valores permitidos a la variable x** o **dominio de x**

Si reemplazamos x por Bogotá, la oración: “Bogotá es la capital de Venezuela”, es falsa.

Si reemplazamos x por Caracas, la oración: “Caracas es la capital de Venezuela”, es cierta. Si reemplazamos x por San Juan o por Habana el enunciado también es falso. Al conjunto de los elementos de D que hacen cierto al enunciado se le llama **conjunto solución de la oración abierta y se representa por CS**. En este caso $CS = \{Caracas\}$

Sea D un conjunto y sea x cualquier elemento de D , $x \in D$, entonces cualquier oración en términos de x se dice que es una oración abierta en x , y a x se le llama variable, al conjunto D se le llama dominio o conjunto de valores permitidos a x . El conjunto solución, CS, de la oración abierta en x es el conjunto de todos los elementos de D que hacen cierta a la oración abierta.

Una oración abierta que se hace cierta para todos los valores permitidos a la variable se llama una **identidad**. Si el conjunto solución es vacío, la oración abierta es una **contradicción**.

Ejemplo: Sea $D = \mathbb{R}$

Si p y q son oraciones abiertas definidas sobre \mathbb{R} , $p: x \leq 5$ y $q: 0 \leq x \leq 10$, halla y traza la gráfica sobre los reales del conjunto solución de cada una de las oraciones abiertas: p , q , $p \wedge q$, $p \vee q$, $(p \wedge q)'$, $(p \vee q)'$

Solución:

El dominio de la variable x es el conjunto de los números reales.

$$CS_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

$$CS_q = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$$

$$CS_{p \wedge q} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

$$CS_{p \vee q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$$

$$CS_{(p \wedge q)'} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \vee x > 5\}$$

$$CS_{(p \vee q)'} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$$

Usa las tablas de veracidad anteriores para hacer las de $p' \wedge q'$; $(p \wedge q)'$; $(p \vee q)'$; $p' \vee q'$.

Dos enunciados son equivalentes si las últimas columnas de su tabla de veracidad son iguales.

Demuestra que $p' \wedge q' \approx (p \vee q)'$ y $p' \vee q' \approx (p \wedge q)'$

p	q	p'	q'	$p' \wedge q'$
cierto	cierto			
cierto	falso			
falso	cierto			
falso	falso			

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q)'$
cierto	cierto		
cierto	falso		
falso	cierto		
falso	falso		

p	q	p'	q'	$p' \vee q'$
cierto	cierto			
cierto	falso			
falso	cierto			
falso	falso			

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$
cierto	cierto		
cierto	falso		
falso	cierto		
falso	falso		

También podemos hacer una sola tabla. En este caso los enunciados equivalentes tienen columnas iguales, partiendo de las mismas posibilidades lógicas

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	p'	q'	$p' \wedge q'$	$(p \vee q)'$	$p' \vee q'$	$(p \wedge q)'$
cierto	cierto								
cierto	falso								
falso	cierto								
falso	falso								

Otro tipo de oración compuesta es la **oración condicional**. La oración condicional es de la forma “si p , entonces q ” siendo p y q oraciones.

Ejemplos :

1. Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles.
2. Si $x = 2$ entonces $x + 3 = 5$.
3. Si dos triángulos son semejantes entonces sus ángulos correspondientes son iguales

La oración “si p , entonces q ” también se escribe $p \Rightarrow q$ y se dice que es cierta para todas las posibilidades lógicas de p y q excepto cuando p es cierto y q es falso.

Tabla de veracidad de $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
cierto	cierto	cierto
cierto	falso	falso
falso	cierto	cierto
falso	falso	cierto

El enunciado condicional $p \Rightarrow q$ se puede frasear en otras formas :

1. si p entonces q
2. p es condición suficiente para q
3. q es condición necesaria para p
4. p sólo si q
5. p implica q

Ejemplos : La oración condicional “Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles” se puede escribir :

1. equilátero **es suficiente** para isósceles
2. isósceles **es necesario** para equilátero
3. equilátero **sólo si** isósceles
4. equilátero **implica** isósceles

Partiendo de la oración condicional $p \Rightarrow q$ podemos formar otras oraciones compuestas que pueden ser o no ser equivalentes a ésta:

Llamamos el recíproco de $p \Rightarrow q$ al enunciado de la forma $q \Rightarrow p$.

En el enunciado “Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles” el recíproco del enunciado es: “Si un triángulo es isósceles entonces es equilátero”.

Se puede demostrar usando las tablas de veracidad que esos enunciados no son equivalentes.

Llamamos contrapositivo de $p \Rightarrow q$ al enunciado de la forma $q' \Rightarrow p'$.

En el enunciado “Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles” el contrapositivo es “Si un triángulo no es isósceles entonces no es equilátero”.

Llamamos enunciado bicondicional al que es de la forma p si y sólo si q , que se representa por el símbolo $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$q' \Rightarrow p'$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \approx (q' \Rightarrow p')$
cierto	cierto	cierto	cierto	cierto	cierto	cierto
cierto	falso	falso	cierto	falso	falso	cierto
falso	cierto	cierto	falso	cierto	falso	cierto
falso	falso	cierto	cierto	cierto	cierto	cierto

De la tabla anterior puedes observar que $(p \Rightarrow q) \approx (q' \Rightarrow p')$. Esto es, el enunciado $p \Rightarrow q$ es equivalente a su contra positivo.

Un enunciado que se hace cierto para todas las posibilidades lógicas se dice que es un **tautología**.

Usa las tablas de veracidad para demostrar que $p \Rightarrow q$ es un enunciado equivalente a $(p \wedge q)'$. Esto es, que $(p \Rightarrow q) \approx (p \wedge q)'$ es una tautología.

p	q	p'	$p \wedge q'$	$(p \wedge q)'$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \approx (p \wedge q)'$
cierto	cierto					
cierto	falso					
falso	cierto					
falso	falso					

Determina de la tabla ¿Qué relación existe entre los enunciados $(p \wedge q')$ y $(p \Rightarrow q)$?

Ejercicios:

1. Sea p el enunciado " $a = b$ " y q el enunciado " $a^2 = b^2$ "

Escribe el enunciado en la forma "Si...entonces" y determina si los enunciados $p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$; $p \Leftrightarrow q$ son ciertos o falsos

2. Considera el enunciado "El entero x es impar sólo si x^2 es un entero impar"

a) Escribe el enunciado en la forma "si..., entonces".

b) Escribe el recíproco del ejercicio a)

c) Escribe el contra positivo del ejercicio 2 a).

3. Si p es el enunciado : A y B son conjuntos , $A \subset B$ y q es el enunciado $A \cup B = B$

a) Escribe el enunciado $p \Rightarrow q$ e indica si es cierto o falso:

b) Escribe el contra positivo de $p \Rightarrow q$ e indica si es cierto o falso.

c) Escribe el recíproco de $p \Rightarrow q$ e indica si es cierto o falso.

4. Escribe en la forma Si...entonces; "Ser divisible por tres es condición necesaria para ser múltiplo de tres".

5. Escribe en la forma Si...entonces: "Ser divisible por tres es condición suficiente para ser múltiplo de tres".

6. La negación de “ $3x = 8$ ó $x > 10$ ” es:
7. La negación de “ $5x \geq 2$ y $2x < 5$ ” es:
8. El contrapositivo de “Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$ ”.
9. La negación de “Si es viernes entonces voy al cine”
10. La negación de “ Todos los divisores de 10 son primos “es:
11. La negación de “ Existe al menos un número real x cuyo cuadrado es negativo ” es: