Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3023

Apellidos: ______________ ______________ Nombre: ______________
No. de estudiante: ______________ Profesor: ______________
Tercer Examen: 10 de diciembre de 2010 # de sección: ______________

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. (*16 puntos*) Considere las funciones f y g definidas a continuación.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - 7x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 10 & \text{si} \quad x \leq -5 \\ -|x| & \text{si} \quad x > -5 \end{cases}$$

Evalúe cada una de las siguientes:

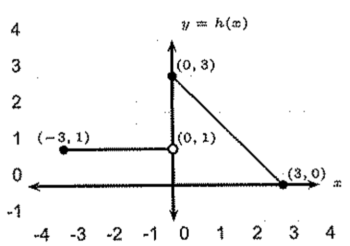
(a) $f(-2) + f(2)=$

(b) $g(-3) + g(3)=$

(c) $f\,(g(-5))=$

(d) $g\,(f(-5))=$

2. (*6 puntos*) Considere la gráfica de $y = h(x)$ de la figura. Escriba una definición por partes para la función $h(x)$.



3023-3

2

3. (*18 puntos*) Sean

$$f(x) = |x|; \qquad g(x) = \sqrt{x}; \qquad h(x) = x^3$$

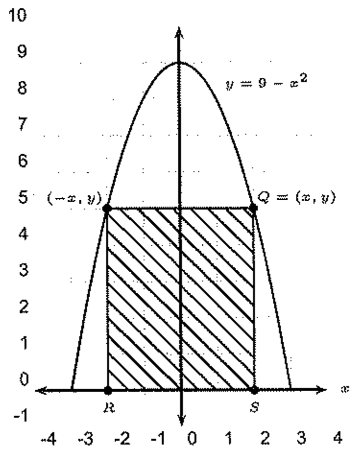
(a) En el mismo sistema de coordenadas, haga un dibujo de las gráficas de $f(x)$ y $f(x) + 3$.

(b) En el mismo sistema de coordenadas, haga un dibujo de las gráficas de $g(x)$ y $g(x + 5)$.

(c) En el mismo sistema de coordenadas, haga un dibujo de las gráficas de $h(x)$ y $h\left(\frac{1}{2}x\right)$.

3023 - 3
3

4. (*8 puntos*) Considere el rectángulo de la figura. Note que dos de sus vértices están sobre la parábola $y = 9 - x^2$ y los otros dos vértices R, S están sobre el eje x. Suponga que las coordenadas del vértice Q son $Q = (x, y)$.



(a) Escriba el área A del rectángulo como función de x.

(b) Escriba el perímetro P del rectángulo como función de x.

5. (*16 puntos*) Dado que $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 + 4$. Evalúe cada una de las siguientes:

(a) $(f \circ g)(x)=$

(b) $(g \circ f)(x)=$

(c) $(f \circ f)(x)=$

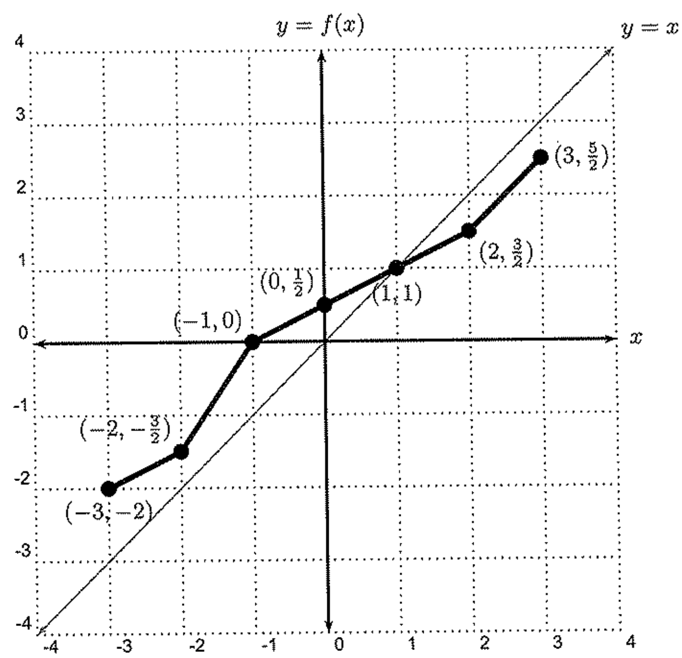
(d) $(g \circ g)(x)=$

3023 3

4

6. (*8 puntos*) Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{5}{3-x}$.

7. (*6 puntos*) En la figura podemos ver la gráfica de una función $y = f(x)$ (la línea negra sólida). Se puede demostrar que la función f tiene una función inversa f^{-1}. En la misma figura haga un dibujo de la gráfica de f^{-1}.



3023-3
5

8. (*8 puntos*) Demuestre, por inducción matemática, que la siguiente fórmula es cierta para todo número natural n,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. (*8 puntos*) Demuestre, por inducción matemática, que $16^n - 1$ es un múltiplo de 5 para todo número natural n.(**Ayuda**. $16^{k+1} - 1 = 16^{k+1} - 16 + 16 - 1$.)

3022-3
6

10. (*6 puntos*) Evalúe los siguientes:

(a) $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} =$

(b) $\begin{pmatrix} 2010 \\ 2008 \end{pmatrix} =$

11. (*6 puntos*) Desarrolle completamente la expresión $(2x+1)^6$ utilizando el teorema binomial.

12. (*4 puntos*) Indique cuál es el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(2x-3)^{10}$.