UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO DE RIO PIEDRAS
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Examen Graduado de Aprovechamiento   Area: Topología.
Fecha: 12 de abril de 1999

---

* * * Escoja exactamente tres de los siguientes problemas * * *

(I). Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $A \subseteq X$, el *borde* de A es el conjunto denotado por Bd A definido a continuación:

$$\text{Bd } A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$$

(a) Demuestre que Int A (el interior de A) y Bd A son disjuntos y que

$$\overline{A} = \text{Int } A \cup \text{Bd } A .$$

(b) Demuestre que $\text{Bd } A = \varnothing \Leftrightarrow A$ es abierto y cerrado a la vez .

(c) Demuestre que U es abierto $\Leftrightarrow \text{Bd } U = \overline{U} - U$.

(II). Una colección $\{ D_\alpha \}$ de subconjuntos cerrados del espacio topológico (X, τ) satisface la *propiedad de intersecciones finitas*, si para toda subcolección finita $\{ D_{\alpha_1} , \ldots , D_{\alpha_n} \}$ de $\{ D_\alpha \}$ tenemos que
$D_{\alpha_1} \cap \ldots \cap D_{\alpha_n} \neq \varnothing$.

Demuestre : X es compacto $\Leftrightarrow$ para toda colección $\{ D_\alpha \}$ de subconjuntos cerrados de X que satisfaga la propiedad de intersecciones finitas , $\cap D_\alpha \neq \varnothing$.

(III).

(a) Demuestre : Si F y G son cerrados en (X, τ_X) y (Y, τ_Y) respectivamente, entonces $F \times G$ es cerrado en $X \times Y$ (dotado de la topología producto) .

(b) Demuestre : $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. (Ayuda: Use la parte (a) .).

(IV). Sea $f : (M, \tau_M) \to (N, \tau_N)$ una función.(en este problema int(G) es el interior de G).

<u>Demuestre :</u>

$$\text{" } f \text{ es continua } \Leftrightarrow \forall\ B \subseteq N \ ,\ f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int } (f^{-1}(B)) \text{ ."}$$

(V). Sea $g : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función continua , inyectiva y suprayectiva.

<u>Demuestre</u> : Si (X, τ_X) es compacto y (Y, τ_Y) Hausdorff , entonces g es un homeomorfismo.