

Universidad de Puerto Rico

Recinto de Río Piedras
Departamento de Matemáticas
& Ciencia de Cómputos

Examen Graduado de Aprovechamiento
Fecha: 16 de marzo de 1998

Área: Topología

* * * Escoja exactamente **tres** de los **cinco** problemas. * * *

1 Problema

¿ Pueden existir funciones $f, g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ de suerte que f y g sean discontinuas en todo $x \in \mathcal{R}$, pero que $f + g, f \cdot g$ y $g \circ f$ sean continuas en todo $x \in \mathcal{R}$? Explique.

2 Problema

Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos topologías de X . Determine propiedades necesarias y suficientes para que:

- (i). la función identidad $1_X : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ sea continua.
- (ii). la función identidad, como arriba, sea un homeomorfismo.
- (iii). la función constante $c_{x_0}(x) := x_0, \quad \forall x \in X$ sea continua.

3 Problema

Sea X un espacio topológico. Suponga que $(a_i)_{i \in \mathcal{N}}$ es una sucesión convergente en X . ¿Bajo que condiciones sobre X es único el límite? Explique.

4 Problema

Sea (X, d) un espacio métrico y p un punto en X . Demuestre que:

(i). para $r > 0$, $A = \{x \in X | d(x, p) > r\}$ es abierto.

(ii). para $r > 0$, $B = \{x \in X | d(x, p) \geq r\}$ es cerrado.

5 Problema

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Sea $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ (con la topología usual.) la función característica de A . Determine una condición necesaria y suficiente sobre $p \in X$ para que χ_A sea continua en p . Explique.