Universidad de Puerto Rico
Recinto de Río Piedras
Departamento de Matemáticas
& Ciencia de Cómputos

Examen Graduado de Aprovechamiento **Área:Topología**
Fecha: 16 de septiembre de 1997

* * * Escoja exactamente **tres** de los **cinco** problemas. * * *

1 Problema

Sean X un conjunto y $cl : \mathcal{P}(X)$[1] $\to \mathcal{P}(X)$ una función que satisface las siguientes condiciones:

(a). $\forall A \in \mathcal{P}(X),\ A \subseteq cl(A)$.

(b). $\forall A \in \mathcal{P}(X),\ cl(cl(A)) = cl(A)$.

(c). $cl(\varnothing) = \varnothing$.

(d). Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$.

Demuestre que la colección

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) | \text{existe un subconjunto } C \text{ de } X \text{ tal que } cl(C) = C \text{ y } U = X - C\ \}$$

es una topología sobre X.

2 Problema

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función biyectiva. Sea $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ la inversa de f. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

(a). g es continua.

(b). f es una función abierta.

(c). f es una función cerrada.

[1] Aquí $\mathcal{P}(X)$ denota a la colección de subconjuntos de X.

3 Problema

Considere a R (los reales) con la topología usual. Denote con $\mathcal{P}(R)$ el conjunto potencia de R y defina $I, C : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$ por:

$$\begin{array}{lcll} I(A) & = & \operatorname{int}(A) & (\textit{interior de } A) \\ C(A) & = & \overline{A} & (\textit{clausura de } A) \end{array}$$

Determine si es cierto o no que I $\circ C = C \circ I$, donde "$\circ$" indica, naturalmente, la composición de funciones. En cualquier caso, explique.

4 Problema

Un subconjunto A de un espacio topológico $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es **denso** en Y, si $\overline{A} = Y$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

(a). $\operatorname{int}(\overline{A}) = \varnothing$.

(b). $Y - \overline{A}$ es denso en Y.

(c). $Y - \overline{(Y - \overline{A})} = \varnothing$.

(d). $A \subseteq \overline{(Y - \overline{A})}$.

5 Problema

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Sea $\chi_A : X \to R$ (con la topología usual.) la función característica de A. Determine una condición necesaria y suficiente sobre $p \in X$ para que χ_A sea continua en p.