Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

Examen Graduado de Aprovechamiento: Topología
Fecha: 22 de abril de 2004

Escoja exactamente **tres** de los siguientes cinco problemas.
Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. Sean $X = \mathbb{Z}^+$ el conjunto de enteros positivos,
$$U_a(b) = \{b + na \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap X \quad \text{y} \quad \mathfrak{B} = \{U_a(b) \mid a, b \in X, (a, b) = 1\}.$$
Demuestre que $\mathfrak{B}$ es una base para una topología sobre X.
(**Nota**. $(a, b) = 1$, significa que a y b son relativamente primos entre sí).

2. Sea $C[0, 1]$ la colección de funciones continuas definidas en el intervalo $[0, 1]$. Demuestre que la función $d : C[0, 1] \times C[0, 1] \to [0, +\infty)$ definida por:
$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \quad \forall f, g \in C[0, 1]$$
es una métrica.

3. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ es **localmente conexo por sendas**, si para cada punto $x \in X$, existe una vecindad abierta y conexa por sendas U de x. Demuestre que si $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo y localmente conexo por sendas, entonces $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo por sendas.

4. Sea X la cinta de Möbius, definida como el espacio cociente $([0, \pi] \times [-1, 1])/ \sim$, donde $\sim$ es la relación que identifica al punto $(0, t)$ de $[0, \pi] \times [-1, 1]$ con el punto $(\pi, -t)$ para toda $t \in [-1, 1]$. Sea Y el espacio que se obtiene de un ánulo (o anillo) al identificar cada par de puntos opuestos del círculo interior. Demuestre que X es homeomorfo a Y.

5. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Una sucesión (x_n) de puntos en X **frecuenta** un conjunto A, si $\forall i \in \mathbb{N}$, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq i$ y $x_j \in A$. Una sucesión (x_n) **se acumula** en $x \in X$, si para toda vecindad U de x, (x_n) frecuenta a U. $x \in X$ es un **punto de acumulación** de X, si existe una sucesión de puntos de X que se acumula en x.
   (a) Demuestre que si (x_n) es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces (x_n) se acumula en x.
   (b) En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}^1})$, encuentre una sucesión (x_n) y un punto (o varios) $x \in \mathbb{R}$ tal que (x_n) se acumula en x, pero (x_n) no converge a x.
   (**Nota**. Aquí $\mathcal{T}_{\mathcal{E}^1}$ es la topología usual sobre $\mathbb{R}$).